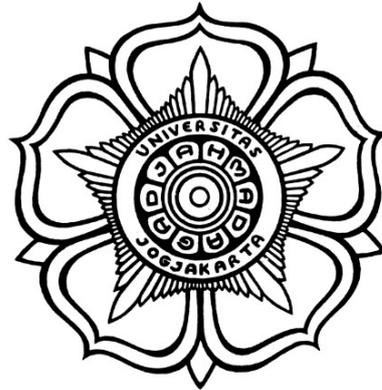


**TESIS**

**MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN**

**( *PLANT DISEASE MODEL* )**



Tesa Nur Padilah  
13/353906/PPA/04262

**PROGRAM STUDI S2 MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS GADJAH MADA  
YOGYAKARTA**

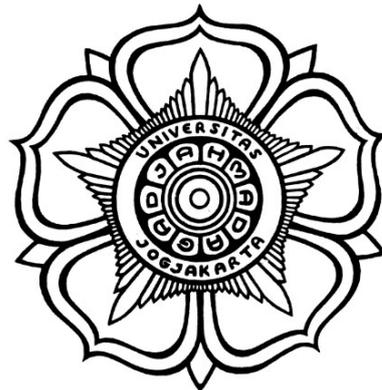
**2015**

**TESIS**

**MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN**

**( *PLANT DISEASE MODEL* )**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat  
*Master of Science* Matematika



Tesa Nur Padilah  
13/353906/PPA/04262

**PROGRAM STUDI S2 MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS GADJAH MADA  
YOGYAKARTA**

**2015**

**HALAMAN PENGESAHAN**

**TESIS**

**MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN**

Telah dipersiapkan dan disusun oleh

Tesa Nur Padilah  
13/353906/PPA/04262

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji  
pada tanggal 31 Juli 2015

Susunan Tim Penguji

  
Imam Solekhuudin, M.Si., Ph.D.  
Pembimbing Utama

  
Dr. Sumardi, M.Si.  
Ketua Tim Penguji

Mengetahui  
a.n. Dekan FMIPA UGM  
Wakil Dekan Bidang Akademik dan  
Kemahasiswaan

  
Dr. Irwan Endrayanto, M.Sc.  
Penguji



Dr. Ing. Ari Setiawan, M.Si.  
NIP. 196511271991031013

  
Dr. Indah Emilia Wijayanti, M.Si.  
Penguji

Tesis ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan  
untuk memperoleh gelar *Master of Science*  
Tanggal 31 Juli 2015

  
Drs. Danardono, M.PH., Ph.D.  
Ketua Program Studi S2 Matematika

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tesis ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar Master di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 31 Juli 2015



Tesa Nur Padilah

Karya sederhana ini penulis persembahkan  
untuk Bapak, Ibu, Adik, dan keluarga tercinta

*”Barang siapa yang menghendaki kehidupan dunia  
maka wajib baginya memiliki ilmu,  
dan barang siapa yang menghendaki kehidupan akhirat  
maka wajib baginya memiliki ilmu,  
dan barang siapa menghendaki keduanya maka wajib baginya memiliki ilmu.”  
(HR. At-Tirmidzi)*

## PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang selalu memberikan nikmat-Nya sehingga tesis yang berjudul "MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN" ini dapat terselesaikan. Penulisan tesis ini ditujukan untuk memenuhi persyaratan memperoleh gelar *Master of Science* di Program Studi S2 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada.

Penulis banyak mendapatkan bantuan dan dukungan dari berbagai pihak dalam penyusunan tesis ini. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI), yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menempuh program pascasarjana.
2. Bapak Drs. Pekik Nurwantoro, M.S., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada.
3. Bapak Drs. Danardono, M.PH., Ph.D., selaku Ketua Program Studi S2 Matematika, dan juga seluruh staf pengajar Program Studi S2 Matematika atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.
4. Bapak Imam Solekhudin, M.Si., Ph.D., selaku dosen pembimbing yang telah dengan sabar membimbing, meluangkan waktu dan mengarahkan penulis hingga terselesaikannya tesis ini.
5. Bapak Dr. Sumardi, M.Si., Bapak Dr. Irwan Endrayanto, M.Sc., dan Ibu Dr. Indah Emilia Wijayanti, M.Si. selaku penguji yang telah memberi masukan-masukan yang membangun kepada penulis dalam menyusun tesis.
6. Orang-orang tersayang yaitu kedua orang tua, Bapak Herli dan Ibu Epa, Rizal Maulana, Najmudin Fauji, serta keluarga yang telah memberikan semangat, do'a, nasehat, dan kasih sayang yang melimpah kepada penulis.

7. Teman-teman terbaik S2 Matematika, khususnya minat Terapan 2013.
8. Teman-teman kost, terima kasih untuk kekeluargaan dan tempat berbagi suka duka selama dua tahun terakhir.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan tesis ini masih belum sempurna. Oleh karenanya, penulis mengharapkan saran maupun kritik yang membangun demi sempurnanya tesis ini. Akhir kata, semoga tesis ini bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 31 Juli 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN MOTTO</b>	<b>v</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>vi</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b>	<b>xii</b>
<b>INTISARI</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xiv</b>
<b>I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Tujuan dan Manfaat Penelitian	2
1.4. Tinjauan Pustaka	3
1.5. Metode Penelitian	4
1.6. Sistematika Penulisan	4
<b>II DASAR TEORI</b>	<b>6</b>
2.1. Persamaan Diferensial	6
2.2. Sistem Persamaan Diferensial	8
2.3. Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya	10
2.4. Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Kestabilan Titik Ekuilibriumnya	19
2.5. Potret Fase	22
2.6. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier dan Kestabilan Titik Ekuilibriumnya	24
2.7. Himpunan Invarian Positif	31
2.8. Kriteria Routh-Hurwitz	33
2.9. <i>Second Additive Compound Matrix</i>	37
2.10. Model Epidemi	41
2.11. Angka Rasio Reproduksi Dasar	41

2.12. Fungsi Respon . . . . .	46
<b>III MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN . . . . .</b>	<b>51</b>
3.1. Asumsi Model . . . . .	51
3.2. Variabel dan Parameter . . . . .	52
3.3. Penurunan Model . . . . .	53
3.4. Titik Ekuilibrium dan Angka Rasio Reproduksi Dasar Model Epi- demi pada Tanaman . . . . .	59
3.4.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit . . . . .	60
3.4.2. Angka Rasio Reproduksi Dasar . . . . .	60
3.4.3. Titik Ekuilibrium Endemik . . . . .	63
3.5. Analisis Perilaku Model . . . . .	67
3.5.1. Analisis Perilaku Model di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	70
3.5.2. Analisis Perilaku Model di Titik Ekuilibrium Endemik . . .	73
<b>IV SIMULASI MODEL . . . . .</b>	<b>89</b>
4.1. Nilai-nilai Parameter . . . . .	90
4.2. Perhitungan Numerik dan Simulasi . . . . .	92
<b>V PENUTUP . . . . .</b>	<b>101</b>
5.1. Kesimpulan . . . . .	101
5.2. Saran . . . . .	102
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>A Program Maple untuk Menampilkan Gambar 4.1 . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>B Program Maple untuk Menampilkan Gambar 4.2 . . . . .</b>	<b>107</b>

## DAFTAR TABEL

2.1	Penentuan <i>Second Additive Compound Matrix</i> . . . . .	38
3.1	Daftar Variabel dan Parameter . . . . .	52
4.1	Nilai-nilai Parameter . . . . .	91

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Potret Fase untuk Sistem (2.23) . . . . .	23
2.2	Potret Fase untuk Sistem (2.10) . . . . .	30
2.3	Potret Fase untuk Sistem (2.34) . . . . .	32
2.4	Fungsi Respon Holling Tipe I, II, dan III . . . . .	48
3.1	Diagram Kompartemen Model Epidemi pada Tanaman . . . . .	53
4.1	Grafik $S$ , $I$ , dan $Q$ di Titik Ekuilibrium $E_1$ . . . . .	94
4.2	Grafik $S$ , $I$ , dan $Q$ di Titik Ekuilibrium $E_0$ . . . . .	98

## DAFTAR LAMBANG

- $\mathfrak{R}$  : himpunan semua bilangan real
- $\mathfrak{R}^n$  : himpunan semua bilangan real berdimensi  $n$
- $\|\cdot\|$  : norm Euclid pada  $\mathfrak{R}^n$
- $Re(\lambda)$  : bagian real dari nilai eigen
- $J_{\mathbf{x}^*}$  : matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^*$
- $\Delta_k$  : determinan matriks Routh Hurwitz tingkat ke- $k$
- $X^{[2]}$  : *second additive compound matrix* dari matriks  $X$
- $\rho(M)$  : radius spektral matriks  $M$
- $R_0$  : angka rasio reproduksi dasar

## INTISARI

### MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN

Oleh

Tesa Nur Padilah

13/353906/PPA/04262

Model epidemi pada tanaman adalah model penyebaran penyakit menular antara tanaman inang dengan hama. Subpopulasi tanaman inang terdiri dari inang rentan, inang terinfeksi dan menularkan, dan inang sembuh. Subpopulasi hama terdiri dari hama rentan dan hama terinfeksi dan menularkan. Pada model ini, respon pemangsa mengikuti fungsi respon Holling Tipe II. Analisis model dilakukan dengan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dan angka rasio reproduksi dasar. Model ini memiliki satu titik ekuilibrium bebas penyakit dan satu titik ekuilibrium endemik. Jika nilai angka rasio reproduksi dasar lebih dari satu, maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal atau terjadi epidemi pada populasi. Jika angka rasio reproduksi dasar kurang dari satu, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Hal ini bermakna untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. Simulasi model untuk penyakit CVPD (*Citrus Vein Phloem Degeneration*) pada tanaman jeruk sejalan dengan analisis perilaku model.

Kata kunci: model epidemi, Holling Tipe II, titik ekuilibrium, angka rasio reproduksi dasar.

## **ABSTRACT**

### **PLANT DISEASE MODEL**

By

Tesa Nur Padilah

13/353906/PPA/04262

Plant disease model is an epidemic model among plants and vectors. Subpopulations of plants consist of susceptible plants, infected plants, and recovered plants. Subpopulations of vector consist of susceptible vectors and infected vectors. In this model, predation response follows Holling Type II response function. The model is then analyzed by checking the stability of the equilibrium points and computing basic reproduction number. From the analysis of the model, there are two equilibrium points, a free disease and an endemic equilibrium points. If the basic reproduction number is more than one, then an endemic equilibrium point is locally asymptotic stable or epidemic will occur in the population. If the basic reproduction number is less than one, then a free disease equilibrium point is locally asymptotic stable. This means that the population will be free from disease, after some period of time. Simulations of the model for CVPD (*Citrus Vein Phloem Degeneration*) disease in citrus plants are in good agreement with model analysis.

Keywords: epidemic model, Holling Type II, equilibrium point, basic reproduction number.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Hama adalah organisme yang mengganggu atau merusak tanaman sehingga pertumbuhan dan perkembangannya terganggu. Secara umum, organisme tersebut adalah mikroorganisme (seperti virus, bakteri, jamur, dan protozoa), gulma, dan binatang (seperti, siput, bekicot, dan serangga). Hama memerlukan ruang hidup sebagai tempat berlindung, berkembang biak, dan mengambil makanan. Tanaman yang dijadikan tempat hidup dan makan bagi hama disebut sebagai tanaman inang.

Diantara hama-hama yang menyerang tanaman, terdapat hama yang membawa patogen. Hama pembawa patogen-patogen tersebut yaitu organisme atau virus yang menyebabkan penyakit. Dalam hal ini, hama dikenal sebagai vektor. Organisme atau virus tersebut umumnya menyebabkan penyakit pada inangnya dengan jalan menggunakan substansi sel inang, mengganggu komponen dan proses sel, memenuhi ruangan dalam sel, dan mengganggu proses metabolisme sehingga mengganggu perkembangan serta fungsi sel lainnya.

Fenomena penyebaran penyakit menular dapat dibentuk menjadi suatu model epidemi. Model epidemi yang paling sederhana adalah model *SI*. Pada model ini, populasi yang diamati terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu subpopulasi rentan, dinotasikan dengan *S* (*susceptible*) dan subpopulasi terinfeksi dan menularkan, dinotasikan dengan *I* (*infectives*). Pada tahun 1927, Kermack-Mckendrick memperluas model *SI* menjadi model *SIR* dengan menambahkan subpopulasi sembuh, dinotasikan dengan *R* (*recovery*) (Ma dan Li, 2009).

Selanjutnya, Shi, dkk (2014) menganalisis model penyakit tanaman yang membagi populasi tanaman inang menjadi tiga subpopulasi, yaitu inang rentan, inang terinfeksi dan menularkan, dan inang sembuh, serta membagi populasi hama

(vektor) menjadi dua subpopulasi yaitu hama rentan dan hama terinfeksi dan menularkan. Beberapa contoh penyakit yang sesuai dengan model epidemi ini adalah penyakit tungro, penyakit mosaik tembakau (Nurhayati, 2012), dan penyakit *Citrus Vein Phloem Degeneration* (CVPD) (Saputra, dkk, 2012). Oleh karena itu, penulis tertarik mengkaji kembali model epidemi tersebut dan mensimulasikannya.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, dapat dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Bagaimana menurunkan model epidemi pada tanaman?
2. Bagaimana menentukan titik ekuilibrium dan angka rasio reproduksi dasar pada model tersebut?
3. Bagaimana kestabilan titik ekuilibrium model tersebut?

## **1.3. Tujuan dan Manfaat Penelitian**

Tujuan penelitian ini yaitu:

1. Mengkaji penurunan model epidemi pada tanaman.
2. Mengkaji perilaku model epidemi pada tanaman.

Penelitian ini diharapkan bermanfaat bagi peneliti, mahasiswa, instansi, masyarakat, maupun semua kalangan yang membutuhkan. Adapun manfaat yang diharapkan yaitu:

1. Menambah referensi tentang pemodelan Matematika, khususnya model penyebaran penyakit antara tanaman dengan hama (vektor).
2. Memberikan masukan kepada pihak yang terkait dalam menangani penyebaran penyakit menular pada tanaman di masyarakat.

#### 1.4. Tinjauan Pustaka

Model epidemi tanaman terdiri dari subpopulasi inang rentan  $S$  (*susceptible*), subpopulasi inang terinfeksi dan menularkan  $I$  (*infectives*), subpopulasi inang sembuh  $R$  (*recovery*), subpopulasi hama rentan  $P$ , dan subpopulasi hama terinfeksi dan menularkan  $Q$ . Model ini dapat disajikan secara matematis dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier. Analisis model dilakukan secara kualitatif dengan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium (Edwards dan Penney, 2000) dan angka rasio reproduksi dasar (Ma dan Li, 2009).

Analisis perilaku model dilakukan dengan terlebih dahulu melinierisasi sistem di titik ekuilibrium (Machowsky, dkk, 2008). Sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya, untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium, dilakukan analisis terhadap bagian real nilai eigen dari persamaan karakteristik (Edwards dan Penney, 2000). Penentuan bagian real nilai eigen tersebut dapat menggunakan metode nilai eigen, kriteria Routh-Hurwitz, atau lemma yang berhubungan dengan *second additive compound matrix*. Kriteria Routh-Hurwitz digunakan untuk mengecek kestabilan melalui koefisien persamaan karakteristiknya tanpa menghitung akar-akar dari persamaan karakteristik yang ada (Olsder, 1998), sedangkan lemma yang berhubungan dengan *second additive compound matrix* digunakan untuk mengecek kestabilan melalui nilai determinan dan *trace* matriksnya. Berdasarkan analisis titik ekuilibrium, dapat diketahui perilaku model epidemi tersebut.

Angka rasio reproduksi dasar adalah suatu nilai yang menyatakan rasio dari banyaknya kasus infeksi kedua terhadap kasus infeksi pertama dalam populasi tertutup yang disebabkan oleh individu terinfeksi dan menularkan dalam keseluruhan populasi rentan. Nilai angka reproduksi dasar dapat dicari dengan menggunakan definisi radius spektral (Brauer, dkk, 1945). Berdasarkan angka rasio reproduksi dasar, dapat diketahui faktor-faktor yang dapat menyebabkan kasus epidemi pada populasi.

Tesis ini mengkaji kembali model epidemi tanaman pada jurnal Shi, dkk (2014). Model epidemi tanaman dalam jurnal tersebut merupakan model mangsa pemangsa yang memperhatikan daya cari pemangsa dan waktu yang diperlukan untuk memangsa sehingga menarik untuk dikaji kembali. Contoh penyakit yang sesuai untuk model epidemi ini adalah penyakit tungro, penyakit mosaik tembakau (Nurhayati, 2012), dan penyakit *Citrus Vein Phloem Degeneration* (CVPD) (Saputra, dkk, 2012). Oleh karena itu, setelah dilakukan analisis perilaku model, penulis akan melakukan simulasi model dengan mengambil contoh penyakit CVPD pada tanaman jeruk.

### **1.5. Metode Penelitian**

Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah mengumpulkan berbagai informasi yang berhubungan dengan model epidemi pada tanaman dengan cara melakukan studi literatur untuk mengkaji teori-teori yang diperlukan. Sebelum melakukan pemodelan, terlebih dahulu menentukan asumsi, variabel, dan parameter pada model. Selanjutnya menurunkan model sesuai dengan asumsi yang ditentukan. Kemudian menganalisis model secara kualitatif, yaitu menentukan titik ekuilibrium, angka rasio reproduksi dasar, dan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium. Tahapan terakhir dari penelitian ini adalah melakukan simulasi model menggunakan *software* Maple.

### **1.6. Sistematika Penulisan**

Penulisan tesis ini dibagi menjadi lima bab sebagai berikut.

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### **BAB II DASAR TEORI**

Bab ini memuat penjelasan mengenai persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, kestabilan titik ekuilibrium, potret fase, him-

punan invarian positif, kriteria Routh-Hurwitz, *second additive compound matrix*, model epidemi, angka rasio reproduksi dasar, dan fungsi respon.

### **BAB III MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN**

Bab ini berisi hasil dari penelitian yang meliputi penurunan model epidemi pada tanaman, penentuan titik ekuilibrium, dan analisis kestabilannya.

### **BAB IV SIMULASI MODEL**

Bab ini membahas simulasi numerik menggunakan program *Maple* dengan menampilkan potret fasenya. Kemudian membahas interpretasi model berdasarkan potret fase tersebut.

### **BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan kesimpulan yang memuat rangkuman hasil penelitian dan saran bagi penelitian selanjutnya.

## BAB II

### DASAR TEORI

Pada bab ini dibahas beberapa konsep dasar yang diperlukan, diantaranya persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial, titik ekuilibrium, kestabilan titik ekuilibrium, potret fase, himpunan invarian positif, kriteria Routh-Hurwitz, *second additive compound matrix*, model epidemi, angka rasio reproduksi dasar, dan fungsi respon.

#### 2.1. Persamaan Diferensial

Berikut ini adalah definisi tentang persamaan diferensial.

**Definisi 2.1.1** (Ross, 1984) *Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.*

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

**Definisi 2.1.2** (Ross, 1984) *Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.*

#### Contoh 2.1.3

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t. \quad (2.2)$$

**Definisi 2.1.4** (Ross, 1984) *Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.*

**Contoh 2.1.5**

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

**Definisi 2.1.6** (Ross, 1984) *Orde dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas dalam persamaan diferensial.*

**Contoh 2.1.7** Berdasarkan Persamaan-persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh

1. Persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial orde 2.
2. Persamaan (2.2) adalah persamaan diferensial orde 4.

Persamaan diferensial biasa orde  $n$  dapat ditulis dalam bentuk

$$y^n = F(x, y, y', y'', \dots, y^{n-1}),$$

dengan  $y$  menyatakan variabel tak bebas dan  $x$  menyatakan variabel bebas (Finizio dan Ladas, 1982).

Berdasarkan kelinierannya, persamaan diferensial biasa dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa linier dan persamaan diferensial biasa nonlinier.

**Definisi 2.1.8** (Ross, 1984) *Persamaan diferensial biasa linier orde  $n$  dengan variabel tak bebas  $y$  dan variabel bebas  $x$  adalah persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk*

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x), \quad (2.3)$$

dengan  $a_0 \neq 0$ .

**Contoh 2.1.9**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = xe^x.$$

Jika koefisien pada Persamaan (2.3) adalah konstanta, maka bentuk persamaan diferensial biasa linier menjadi

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x). \quad (2.4)$$

Persamaan diferensial biasa linier orde  $n$  dikatakan homogen jika ruas kanan pada Persamaan (2.4) sama dengan nol, yaitu  $f(x) = 0$ . Persamaan diferensial biasa linier orde  $n$  dikatakan nonhomogen jika ruas kanan pada Persamaan (2.4) tidak sama dengan nol, yaitu  $f(x) \neq 0$ .

**Definisi 2.1.10** (Ross, 1984) *Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang bukan persamaan diferensial biasa linier.*

**Contoh 2.1.11**

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y^2 &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 + 6y &= 0. \end{aligned}$$

Jika dalam suatu persamaan diferensial, variabel bebas  $x$  tidak dinyatakan secara eksplisit, maka disebut persamaan diferensial otonomus (Verhulst, 1985). Salah satu contoh persamaan diferensial otonomus orde satu adalah

$$\frac{dy}{dx} = 2y^3 - y.$$

**2.2. Sistem Persamaan Diferensial**

Pada subbab ini akan dibahas sistem persamaan diferensial biasa, sehingga pada subbab-subbab selanjutnya sistem persamaan diferensial yang dimaksud adalah sistem persamaan diferensial biasa. Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linier dan sistem persamaan diferensial nonlinier. Secara matematis, sistem persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (2.5)$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

dengan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel tak bebas dan  $t$  adalah variabel bebas. Jika pada Persamaan (2.5), variabel  $t$  tidak dinyatakan secara eksplisit, maka Sistem (2.5) disebut sistem otonomus dan secara matematis dapat ditulis

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

dengan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan kelinierannya, sistem otonomus dapat dikelompokkan menjadi dua kelompok, yaitu sistem otonomus linier dan sistem otonomus nonlinier. Sistem otonomus linier adalah sistem otonomus yang terbentuk dari himpunan persamaan diferensial linier. Sistem otonomus nonlinier adalah sistem otonomus selain sistem otonomus linier.

Penyelesaian sistem persamaan diferensial dapat dicari secara analitik atau secara numerik. Jika penyelesaian sulit atau tidak mungkin dicari secara analitik ataupun numerik, maka dapat dilakukan analisis kualitatif dengan cara mengecek kestabilan titik ekuilibrium untuk mengetahui perilaku dari sistem tersebut (Edwards dan Penney, 2000).

### 2.3. Titik Ekuilibrium dan Kestabilannya

Berikut ini dijelaskan definisi tentang titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial.

**Definisi 2.3.1** (*Edwards dan Penney, 2000*) Titik  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  disebut sebagai titik ekuilibrium sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  jika memenuhi  $\mathbf{f}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \mathbf{0}$ .

Titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan metode substitusi.

**Contoh 2.3.2** Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= x - 2y.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Berdasarkan Definisi 2.3.1, titik ekuilibrium Sistem (2.7) diperoleh dari

$$\frac{dx}{dt} = 0\tag{2.8}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.\tag{2.9}$$

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium Sistem (2.7) dengan metode substitusi.

Berdasarkan Persamaan (2.8) diperoleh

$$-x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Berdasarkan Persamaan (2.9) diperoleh

$$x - 2y = 0,$$

sehingga dengan menyubstitusikan  $x = 0$  diperoleh  $y = 0$ . Dengan demikian, diperoleh titik ekuilibrium Sistem (2.7) yaitu  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

**Contoh 2.3.3** Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} &= -5y + xy.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Berdasarkan Definisi 2.3.1, titik ekuilibrium Sistem (2.10) diperoleh dari

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0. \quad (2.12)$$

Selanjutnya akan dicari titik ekuilibrium Sistem (2.7) dengan metode substitusi.

Berdasarkan Persamaan (2.12) diperoleh

$$\begin{aligned} -5y + xy &= 0 \\ \Leftrightarrow y(x - 5) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh  $y = 0$  atau  $x = 5$ . Berdasarkan Persamaan (2.11) diperoleh

$$-3x + x^2 - xy = 0.$$

Jika  $y = 0$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} -3x + x^2 - x \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 3) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh  $x = 0$  atau  $x = 3$ . Jadi diperoleh titik ekuilibrium  $(0, 0)$  dan  $(3, 0)$ . Selanjutnya, jika  $x = 5$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} -3 \cdot 5 + 5^2 - 5y &= 0 \\ \Leftrightarrow -15 + 25 - 5y &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 2. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium  $(5, 2)$ . Dengan demikian, diperoleh titik ekuilibrium Sistem (2.10) yaitu  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ , dan  $(5, 2)$ .

Sifat dari perilaku penyelesaian sistem persamaan diferensial dapat diketahui dengan cara menganalisis kestabilan titik ekuilibrium. Kestabilan pada suatu sistem berarti perubahan kecil pada sistem hanya sedikit mengubah perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang. Akan tetapi, apabila perubahan kecil pada sistem mengakibatkan perubahan besar pada perilaku penyelesaian untuk waktu yang akan datang, maka sistem dikatakan tidak stabil.

Sebelum diberikan penjelasan tentang kestabilan titik ekuilibrium, terlebih dahulu akan diberikan definisi norm sebagai berikut.

**Definisi 2.3.4** (Royden dan Fitzpatrick, 2010) Diberikan ruang linier  $X$ . Suatu fungsi bernilai real  $\|\cdot\|$  pada  $X$  disebut norm jika  $\forall f, g \in X, \forall \alpha \in \mathfrak{R}$ , berlaku

1.  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ,
2.  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ,
3.  $\|f\| \geq 0$  dan  $\|f\| = 0$  jika dan hanya jika  $f = 0$ .

**Contoh 2.3.5** Diberikan  $X = \mathfrak{R}^n$  dan  $\forall x \in \mathfrak{R}^n$  dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}$  didefinisikan

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Diperhatikan bahwa  $\forall x, y \in \mathfrak{R}^n$  dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}$  dan  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n), y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathfrak{R}$  dan  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$  berlaku

1.  $\|x + y\| = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}$ .

Berdasarkan pertidaksamaan Minkowski

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan  $x_i > 0, y_i > 0$ , dan  $p \geq 1$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Jadi,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

2.  $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 \|\alpha x\| &= \|\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \\
 &= \|(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)\| \\
 &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \dots + (\alpha x_n)^2} \\
 &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \dots + \alpha^2 x_n^2} \\
 &= \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\
 &= |\alpha| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\
 &= |\alpha|\|x\|.
 \end{aligned}$$

3.  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \geq 0$

dan

$$\|x\| = 0 \text{ jika dan hanya jika } (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

Jadi,  $\forall x \in \mathfrak{R}^n$  dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  adalah norm pada  $\mathfrak{R}^n$ .

Berikut ini definisi-definisi yang berhubungan dengan kestabilan titik ekuilibrium.

**Definisi 2.3.6** (Boyce dan DiPrima, 1997) Titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^*$  dari sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  dikatakan stabil jika untuk setiap  $\epsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$  berlaku  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ , untuk setiap  $t \geq t_0$ .

**Definisi 2.3.7** (Boyce dan DiPrima, 1997) Titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^*$  dari sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  dikatakan stabil asimtotik lokal jika titik tersebut stabil dan terdapat  $\delta_1 > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*\| < \delta_1$  berlaku  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ .

**Definisi 2.3.8** (Boyce dan DiPrima, 1997) Titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^*$  dari sistem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  tidak stabil jika tidak memenuhi Definisi 2.3.6.

**Contoh 2.3.9** Diberikan sistem

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Solusi Sistem (2.13) adalah  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  dengan

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= C_2 e^{-2t}.\end{aligned}$$

Titik ekuilibriumnya adalah  $(0, 0)$ . Jika diberikan syarat awal  $\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$ , maka solusi MNA-nya adalah

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t_0) e^{t_0-t} \\ x_2(t) &= x_2(t_0) e^{t_0-2t}.\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|(x_1(t), x_2(t)) - (0, 0)\| &= \|\mathbf{x}(t)\| \\ &= \|(x_1(t_0) e^{t_0-t}, x_2(t_0) e^{t_0-2t})\| \\ &= \sqrt{(x_1(t_0) e^{t_0-t})^2 + (x_2(t_0) e^{t_0-2t})^2} \\ &< e^{t_0-t} \sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} \\ &= e^{t_0-t} \|(x_1(t_0), x_2(t_0))\| \\ &= e^{t_0-t} \|\mathbf{x}(t_0)\| \\ &\leq \|\mathbf{x}(t_0)\|, \forall t \geq t_0.\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap  $\epsilon > 0$ , dipilih  $\delta = \epsilon$ , sedemikian sehingga untuk setiap  $\mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  berlaku  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta = \epsilon, \forall t \geq t_0$  atau titik ekuilibrium  $(0, 0)$  stabil. Selanjutnya, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem (2.13) stabil asimtotik lokal karena

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t_0) e^{t_0-t} = 0$$

dan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t_0) e^{t_0-2t} = 0.$$

**Contoh 2.3.10** Diberikan sistem

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_2.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Solusi Sistem (2.14) adalah  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  dengan

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 - 2C_2e^{-3t} \\ x_2(t) &= 3C_2e^{-3t}.\end{aligned}$$

Titik ekuilibriumnya adalah  $(0, 0)$ . Jika diberikan syarat awal  $\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$ , maka

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= C_1 - 2C_2e^{-3t_0} \\ \Leftrightarrow C_1 &= x_1(t_0) + 2C_2e^{-3t_0}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}x_2(t_0) &= 3C_2e^{-3t_0} \\ \Leftrightarrow C_2 &= \frac{x_2(t_0)}{3e^{-3t_0}},\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t_0) + 2(3x_2(t_0)e^{3t_0})e^{-3t} \\ \Leftrightarrow x_1(t) &= x_1(t_0) + 6x_2(t_0)e^{3(t_0-t)}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}x_2(t) &= 3(3x_2(t_0)e^{3t_0})e^{-3t} \\ \Leftrightarrow x_2(t) &= 9x_2(t_0)e^{3(t_0-t)}.\end{aligned}$$

Jadi, solusi MNA-nya adalah

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t_0) + 6x_2(t_0)e^{3(t_0-t)} \\ x_2(t) &= 9x_2(t_0)e^{3(t_0-t)}.\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa

$$\|(x_1(t), x_2(t)) - (0, 0)\| = \|\mathbf{x}(t)\|$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &= \|(x_1(t_0) + 6x_2(t_0)e^{3(t_0-t)}, 9x_2(t_0)e^{3(t_0-t)})\| \\ &= \sqrt{[x_1(t_0) + 6x_2(t_0)e^{3(t_0-t)}]^2 + [9x_2(t_0)e^{3(t_0-t)}]^2} \\ &= \sqrt{(x_1(t_0))^2 + 12x_1(t_0)x_2(t_0)e^{3(t_0-t)} + 117(x_2(t_0))^2 e^{6(t_0-t)}} \\ &< \sqrt{(x_1(t_0))^2 + x_1(t_0)x_2(t_0) + (x_2(t_0))^2} \\ &< \sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} + \sqrt{x_1(t_0)x_2(t_0)} \\ &< \sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} + \sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} \\ &= 2\sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} \\ &= 2\|x_1(t_0), x_2(t_0)\| \\ &= 2\|\mathbf{x}(t_0)\|, \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap  $\epsilon > 0$ , dipilih  $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ , sedemikian sehingga untuk setiap  $\mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  berlaku  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|2\mathbf{x}(t_0)\| < 2\delta = 2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \forall t \geq t_0$  atau titik ekuilibrium  $(0, 0)$  stabil. Selanjutnya, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  tidak stabil asimtotik lokal karena

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 9x_2(t_0)e^{3t_0-t} = 0,$$

tetapi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t_0) + 6x_2(t_0)e^{3t_0-t} = x_1(t_0) + 0 = x_1(t_0).$$

Jadi, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem (2.14) stabil.

**Contoh 2.3.11** Diberikan sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Solusi Sistem (2.15) adalah  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  dengan

$$\begin{aligned}x_1(t) &= C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) \\x_2(t) &= C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t).\end{aligned}$$

Titik ekuilibriumnya adalah  $(0, 0)$ . Jika diberikan syarat awal  $\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$ , maka solusi MNA-nya adalah

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1(t_0) \cos(t - t_0) + x_2(t_0) \sin(t - t_0) \\x_2(t) &= -x_1(t_0) \sin(t - t_0) + x_2(t_0) \cos(t - t_0).\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|(x_1(t), x_2(t)) - (0, 0)\| &= \|\mathbf{x}(t)\| \\&= \sqrt{(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2}\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 &= (x_1(t_0) \cos(t - t_0) + x_2(t_0) \sin(t - t_0))^2 \\&\quad + (-x_1(t_0) \sin(t - t_0) + x_2(t_0) \cos(t - t_0))^2 \\&= (x_1(t_0))^2 \cos^2(t - t_0) + (x_2(t_0))^2 \sin^2(t - t_0) \\&\quad + 2x_1(t_0) \cos(t - t_0) x_2(t_0) \sin(t - t_0) \\&\quad + (x_1(t_0))^2 \sin^2(t - t_0) + (x_2(t_0))^2 \cos^2(t - t_0) \\&\quad - 2x_1(t_0) \sin(t - t_0) x_2(t_0) \cos(t - t_0) \\&= (x_1(t_0))^2 \cos^2(t - t_0) + (x_2(t_0))^2 \sin^2(t - t_0) \\&\quad + (x_1(t_0))^2 \sin^2(t - t_0) + (x_2(t_0))^2 \cos^2(t - t_0) \\&= [(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2] [\sin^2(t - t_0) + \cos^2(t - t_0)] \\&= (x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\| &= \sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} \\&< 2\sqrt{(x_1(t_0))^2 + (x_2(t_0))^2} \\&= 2\|x_1(t_0), x_2(t_0)\| \\&= 2\|\mathbf{x}(t_0)\|, \forall t \geq t_0.\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap  $\epsilon > 0$ , dipilih  $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ , sedemikian sehingga untuk setiap  $\mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  berlaku  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|2\mathbf{x}(t_0)\| < 2\delta = 2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon, \forall t \geq t_0$  atau titik ekuilibrium  $(0, 0)$  stabil. Selanjutnya, solusi  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  merupakan fungsi trigonometri berupa fungsi sinus dan cosinus, sehingga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t_0) \cos(t - t_0) + x_2(t_0) \sin(t - t_0)) \text{ tidak ada}$$

dan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-x_1(t_0) \sin(t - t_0) + x_2(t_0) \cos(t - t_0)) \text{ tidak ada.}$$

Hal ini dikarenakan  $\cos(t - t_0)$  dan  $\sin(t - t_0)$  selalu berosilasi diantara  $-1$  dan  $1$ , dengan demikian kurvanya tidak mendekati  $(0, 0)$  untuk  $t \rightarrow \infty$ . Jadi, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem (2.15) stabil.

**Contoh 2.3.12** Diberikan sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Solusi Sistem (2.16) adalah  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  dengan

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ae^{-t} \\ x_2(t) &= Be^{2t}. \end{aligned}$$

Titik ekuilibriumnya adalah  $(0, 0)$ . Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium tersebut tidak stabil. Dengan kata lain akan dibuktikan bahwa  $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  tetapi  $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \epsilon$ , untuk suatu  $t \geq t_0$ . Jika diberikan syarat awal  $\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0))$ , maka solusi MNA-nya adalah

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_0)e^{t_0-t} \\ x_2(t) &= x_2(t_0)e^{2(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Dipilih  $\epsilon = 1$ , sehingga diperoleh

1. Untuk setiap  $\delta$ , dengan  $0 < \delta < 1$ , maka untuk  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta < 1$  dan  $t > t_0 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x_2(t_0)} \right| > t_0$  diperoleh

$$\begin{aligned}
\|(x_1(t), x_2(t)) - (0, 0)\| &= \|\mathbf{x}(t)\| \\
&= \|(x_1(t_0) e^{t_0-t}, x_2(t_0) e^{2(t-t_0)})\| \\
&= \sqrt{(x_1(t_0) e^{t_0-t})^2 + (x_2(t_0) e^{2(t-t_0)})^2} \\
&= \sqrt{x_1^2(t_0) e^{2(t_0-t)} + x_2^2(t_0) e^{4(t-t_0)}} \\
&> \sqrt{x_2^2(t_0) e^{4(t-t_0)}} \\
&= |x_2(t_0)| e^{2(t-t_0)} \\
&> |x_2(t_0)| e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x_2(t_0)} \right|} \\
&= |x_2(t_0)| \left| \frac{1}{x_2(t_0)} \right| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. Untuk setiap  $\delta$ , dengan  $\delta \geq 1$ , maka untuk

- (a)  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < 1$  selanjutnya sama dengan poin 1.
- (b)  $1 \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  dipilih  $t = t_0$  sehingga diperoleh

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{x}(t_0)\| \geq 1 = \epsilon.$$

Dengan demikian, jika dipilih  $\epsilon = 1$ , maka untuk setiap  $\delta > 0$ , terdapat  $\mathbf{x}(t)$  dengan  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  tetapi  $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \epsilon$ , untuk suatu  $t \geq t_0$ . Jadi, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem (2.16) tidak stabil.

Jika suatu titik ekuilibrium stabil, maka penyelesaiannya berada di sekitar titik ekuilibrium. Jika titik ekuilibrium stabil asimtotik, maka penyelesaian akan menuju ke titik ekuilibrium. Jika titik ekuilibrium tidak stabil, maka penyelesaian akan menjauh dari titik ekuilibrium (Subiono, 2010).

#### 2.4. Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Kestabilan Titik Ekuilibriumnya

Ditinjau kembali Sistem (2.6). Jika masing-masing fungsi  $f_1, f_2, \dots, f_n$  pada Persamaan (2.6) merupakan fungsi linier dari variabel bebas  $t$  dan variabel tak bebas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , maka sistem tersebut disebut sistem persamaan diferensial linier

(Boyce dan DiPrima, 1997). Jika  $x(t)$  merupakan variabel tak bebas dengan variabel bebas  $t$ ,  $x'(t)$  atau  $\dot{x}(t)$  adalah turunan dari  $x(t)$  terhadap  $t$  dan  $a(t)$  adalah koefisien dari  $x(t)$ , maka sistem dari  $n$  persamaan diferensial linier orde  $n$  dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}x' + \dots + a_{1(n-1)}x^{(n-1)} + a_{1n}x^{(n)} &= f_1(t) \\ a_{21}x + a_{22}x' + \dots + a_{2(n-1)}x^{(n-1)} + a_{2n}x^{(n)} &= f_2(t) \\ &\vdots \\ a_{n1}x + a_{n2}x' + \dots + a_{n(n-1)}x^{(n-1)} + a_{nn}x^{(n)} &= f_n(t). \end{aligned}$$

Sistem dari  $n$  persamaan diferensial linier orde satu adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sistem (2.17) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t). \quad (2.18)$$

Jika fungsi  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$ , maka Sistem (2.18) dikatakan homogen, sehingga dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Jadi, Sistem (2.19) dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t).$$

Jika koefisien sistem merupakan konstanta, maka Sistem (2.19) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

yang secara singkat dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Penyelesaian kualitatif Sistem (2.20) dilakukan dengan cara menentukan kestabilan titik ekuilibrium dengan menganalisis bagian real dari nilai eigen matriks  $A$ . Berikut ini dijelaskan definisi yang berhubungan dengan nilai eigen Sistem (2.20).

**Definisi 2.4.1** (*Olsder, 1998*) Misalkan  $A$  adalah matriks berukuran  $n \times n$ . Nilai eigen dari matriks  $A$  adalah akar-akar karakteristik dari polinomial  $\det(A - \lambda I) = 0$ , atau ditulis dalam bentuk

$$\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0, \quad (2.21)$$

dengan  $\alpha_n = 1$ .

Selanjutnya, berikut ini dijelaskan teorema yang dapat digunakan untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium sistem linier.

**Teorema 2.4.2** (*Edwards dan Penney, 2000*) Jika matriks  $A$  sistem  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  mempunyai nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , dan  $Re(\lambda_k)$  adalah bagian real dari nilai eigen  $\lambda_k$ , maka kestabilan titik ekuilibrium  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = (0, 0, \dots, 0)$  dikatakan

1. stabil asimtotik lokal, jika  $Re(\lambda_k) < 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$ ,

2. stabil, jika  $Re(\lambda_k) \leq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n$ , dan
3. tidak stabil, jika  $Re(\lambda_k) > 0$ , untuk suatu  $k$ .

Kemudian diberikan contoh penentuan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial beserta potret fase di sekitar titik ekuilibrium.

## 2.5. Potret Fase

Diberikan sistem

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (2.22)$$

dengan  $A$  adalah matriks konstanta berukuran  $2 \times 2$  dan  $\mathbf{x}$  adalah vektor  $2 \times 1$ .

Solusi Sistem (2.22) adalah fungsi vektor  $\mathbf{x} = \Phi(t)$  yang memenuhi persamaan diferensial. Fungsi tersebut dapat ditinjau sebagai representasi parametrik atas kurva pada bidang  $xy$ . Kurva ini sering dipandang sebagai lintasan atau trayektori yang dilintasi oleh perpindahan partikel yang mempunyai kecepatan  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ . Bidang  $xy$  sendiri disebut sebagai bidang fase dan kumpulan representatif trayektori disebut sebagai potret fase (Boyce dan DiPrima, 1997). Lebih lanjut, potret fase merupakan gambar semua kurva solusi, namun bukan gambar solusi secara keseluruhan tetapi hanya gambar trayektori yang mewakili.

**Contoh 2.5.1** Diberikan sistem linier

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -3x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Dimisalkan matriks  $A$  sebagai

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

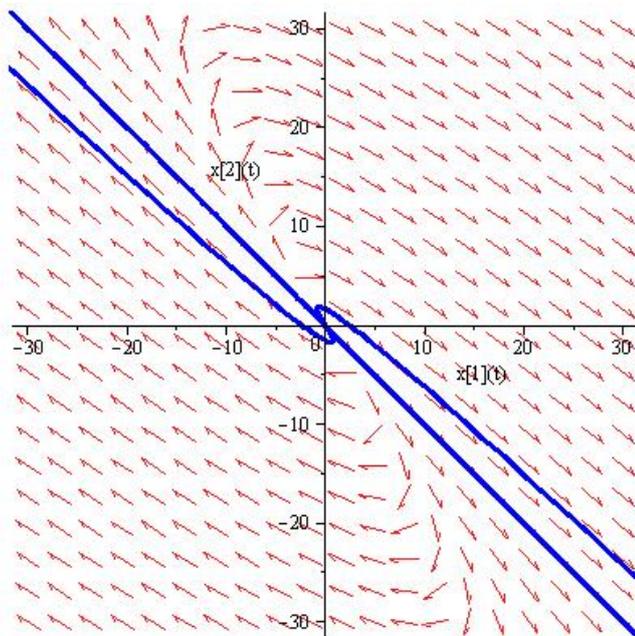
Nilai eigen matriks  $A$  diperoleh dari polinomial  $\det(A - \lambda I) = 0$  yaitu

$$\begin{aligned} & \det \left( \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh dua nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = 2$  atau  $\lambda_2 = 1$ . Karena  $\text{Re}(\lambda_1) > 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.4.2, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem (2.23) adalah tidak stabil. Solusi umum Sistem (2.23) adalah

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^t \\ x_2(t) &= -c_1 e^{2t} - \frac{3}{2} c_2 e^t. \end{aligned}$$

Berikut ini adalah potret fase untuk Sistem (2.23).



**Gambar 2.1** Potret Fase untuk Sistem (2.23)

Berdasarkan Gambar (2.1) terlihat bahwa titik ekuilibrium  $(0, 0)$  tidak stabil. Garis biru pada Gambar (2.1) menyatakan solusi khusus Sistem (2.23) dengan empat syarat awal berbeda, yaitu

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1;$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = -1;$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1;$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$$

dan setiap syarat awal menghasilkan suatu grafik.

## 2.6. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier dan Kestabilan Titik Ekuilibriumnya

Diperhatikan kembali Sistem (2.6). Jika masing-masing fungsi  $f_1, f_2, \dots, f_n$  pada Persamaan (2.6) bukan fungsi linier dari variabel bebas  $t$  dan variabel tak bebas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , maka sistem tersebut disebut sistem persamaan diferensial nonlinier (Boyce dan DiPrima, 1997). Sistem otonomus yang berisikan persamaan-persamaan diferensial nonlinier orde satu dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Jika  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  adalah titik ekuilibrium Sistem nonlinier (2.24), maka diperoleh

$$f_1(\mathbf{x}^*) = f_2(\mathbf{x}^*) = \dots = f_n(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Perilaku penyelesaian Sistem nonlinier (2.24) disekitar titik ekuilibrium dapat ditentukan melalui linierisasi sistem dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots \\
&\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(\mathbf{x}^*) + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Linierisasi Sistem (2.24) di sekitar titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dilakukan dengan cara mengabaikan suku-suku yang pangkatnya lebih dari satu pada hasil ekspansi deret Taylor di sekitar titik tersebut (Machowsky, dkk, 2008). Dengan mengabaikan suku-suku yang mempunyai pangkat lebih dari satu pada Sistem (2.25), diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) \\
&\quad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Sistem (2.26) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, didefinisikan

$$w_1 = x_1 - x_1^*, w_2 = x_2 - x_2^*, \dots, w_n = x_n - x_n^*, \tag{2.27}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{dw_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dw_n}{dt} = \frac{dx_n}{dt}. \quad (2.28)$$

Persamaan-persamaan pada (2.27) dan (2.28) disubstitusikan ke Sistem (2.26), sehingga diperoleh hasil linierisasi Sistem nonlinier (2.24) di sekitar titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} w_2 + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} w_n \\ \frac{dw_2}{dt} &= \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} w_2 + \dots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} w_n \\ &\vdots \\ \frac{dw_n}{dt} &= \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} w_2 + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} w_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \frac{dw_1}{dt} \\ \frac{dw_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dw_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)} \mathbf{w}.$$

Matriks  $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$  disebut sebagai matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Sifat kestabilan titik ekuilibrium suatu sistem nonlinier dengan sifat kestabilan sistem linierisasinya dapat dihubungkan jika titik ekuilibriumnya merupakan titik ekuilibrium hiperbolik.

**Definisi 2.6.1** (Perko, 2000) Diberikan  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  titik ekuilibrium Sistem nonlinier (2.24). Titik  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika bagian real dari semua nilai eigen  $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$  tidak nol. Titik  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  disebut titik ekuilibrium nonhiperbolik jika terdapat nilai eigen  $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$  yang bagian realnya nol.

Jika  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  titik ekuilibrium hiperbolik, maka hubungan sifat kestabilan titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dengan sifat kestabilan sistem linierisasinya diberikan dalam Teorema berikut.

**Teorema 2.6.2** (Perko, 2000) *Diberikan matriks Jacobian  $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$  dari Sistem (2.29).*

1. *Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks  $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$  bernilai negatif, maka titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari Sistem nonlinier (2.24) stabil asimtotik lokal.*
2. *Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dari matriks  $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$  yang bagian realnya bernilai positif, maka titik ekuilibrium  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  dari Sistem nonlinier (2.24) tidak stabil.*

**Contoh 2.6.3** Diperhatikan kembali Sistem (2.10). Sistem tersebut mempunyai tiga titik ekuilibrium, yaitu  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ , dan  $(5, 2)$ . Selanjutnya, akan dilakukan linierisasi di sekitar titik-titik ekuilibrium tersebut untuk mengecek kestabilannya. Matriks Jacobian hasil linierisasi di sekitar titik ekuilibrium  $(x^*, y^*)$  adalah

$$\begin{aligned}
 J_{(x^*, y^*)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial dx}{\partial x dt} & \frac{\partial dx}{\partial y dt} \\ \frac{\partial dy}{\partial x dt} & \frac{\partial dy}{\partial y dt} \end{bmatrix}_{(x,y)=(x^*, y^*)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(-3x + x^2 - xy) & \frac{\partial}{\partial y}(-3x + x^2 - xy) \\ \frac{\partial}{\partial x}(-5y + xy) & \frac{\partial}{\partial y}(-5y + xy) \end{bmatrix}_{(x,y)=(x^*, y^*)} \\
 &= \begin{bmatrix} -3 + 2x - y & -x \\ y & -5 + x \end{bmatrix}_{(x,y)=(x^*, y^*)} .
 \end{aligned}$$

1. Linierisasi di sekitar titik ekuilibrium  $(0, 0)$ .

Hasil linierisasi Sistem (2.10) di sekitar titik ekuilibrium  $(0, 0)$  adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = J_{(0,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

dengan  $J_{(0,0)}$  matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  yaitu

$$\begin{aligned} J_{(0,0)} &= \begin{bmatrix} -3 + 2 \cdot 0 - 0 & 0 \\ 0 & -5 + 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik untuk  $J_{(0,0)}$  adalah

$$\begin{aligned} \det(J_{(0,0)} - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 0 \\ 0 & -5 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3 - \lambda)(-5 - \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh dua nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = -3$  atau  $\lambda_2 = -5$ . Karena  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.4.2, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem linier (2.30) adalah stabil asimtotik lokal. Selanjutnya, karena  $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , maka berdasarkan Definisi 2.6.1, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  adalah titik ekuilibrium hiperbolik, sehingga berdasarkan Teorema 2.6.2, titik ekuilibrium  $(0, 0)$  Sistem nonlinier (2.10) juga stabil asimtotik lokal.

## 2. Linierisasi di sekitar titik ekuilibrium $(3, 0)$ .

Hasil linierisasi Sistem (2.10) di sekitar titik ekuilibrium  $(3, 0)$  adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = J_{(3,0)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

dengan  $J_{(3,0)}$  matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $(x^*, y^*) = (3, 0)$  yaitu

$$\begin{aligned} J_{(3,0)} &= \begin{bmatrix} -3 + 2 \cdot 3 - 0 & -3 \\ 0 & -5 + 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik untuk  $J_{(3,0)}$  adalah

$$\begin{aligned} \det(J_{(3,0)} - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -3 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3 - \lambda)(-2 - \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh dua nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = 3$  atau  $\lambda_2 = -2$ . Karena  $\text{Re}(\lambda_1) > 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.4.2, titik ekuilibrium  $(3, 0)$  Sistem linier (2.31) adalah tidak stabil. Selanjutnya, karena  $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , maka berdasarkan Definisi 2.6.1, titik ekuilibrium  $(3, 0)$  adalah titik ekuilibrium hiperbolik, sehingga berdasarkan Teorema 2.6.2, titik ekuilibrium  $(3, 0)$  Sistem nonlinier (2.10) juga tidak stabil.

### 3. Linierisasi di sekitar titik ekuilibrium $(5, 2)$ .

Hasil linierisasi Sistem (2.10) di sekitar titik ekuilibrium  $(5, 2)$  adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = J_{(5,2)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

dengan  $J_{(5,2)}$  matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $(x^*, y^*) = (5, 2)$  yaitu

$$\begin{aligned} J_{(5,2)} &= \begin{bmatrix} -3 + 2.5 - 2 & -5 \\ 2 & -5 + 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik untuk  $J_{(5,2)}$  adalah

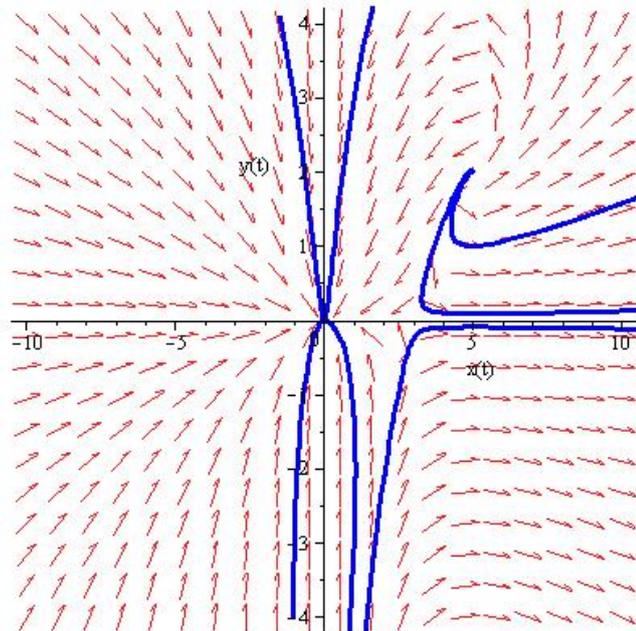
$$\begin{aligned} \det(J_{(5,2)} - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -5 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda(5 - \lambda) + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 10 &= 0, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 40}}{2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{15}i}{2}.\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh dua nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$  atau  $\lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$ . Karena  $\text{Re}(\lambda_1) > 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) > 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.4.2, titik ekuilibrium  $(5, 2)$  Sistem linier (2.32) adalah tidak stabil. Selanjutnya, karena  $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$  dan  $\text{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , maka berdasarkan Definisi 2.6.1, titik ekuilibrium  $(5, 2)$  adalah titik ekuilibrium hiperbolik, sehingga berdasarkan Teorema 2.6.2, titik ekuilibrium  $(5, 2)$  Sistem nonlinier (2.10) juga tidak stabil.

Berikut ini adalah potret fase untuk Sistem (2.10).



**Gambar 2.2 Potret Fase untuk Sistem (2.10)**

Berdasarkan Gambar (2.2) terlihat bahwa titik ekuilibrium  $(0, 0)$  stabil asimtotik lokal, titik  $(3, 0)$  tidak stabil, dan titik  $(5, 2)$  tidak stabil. Garis biru pada Gambar

(2.2) menyatakan solusi khusus Sistem (2.10) dengan tujuh syarat awal berbeda, yaitu

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 3;$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = -3;$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = 3;$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -3;$$

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = 0, 1;$$

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = -0, 1;$$

$$x_1(0) = 5, x_2(0) = 1$$

dan setiap syarat awal menghasilkan suatu grafik.

## 2.7. Himpunan Invarian Positif

Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.33}$$

dengan  $\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diberikan  $\mathbf{x}^*$  titik ekuilibrium Sistem (2.33) dan  $\mathbf{x}^* \in \mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Definisi himpunan invarian adalah sebagai berikut.

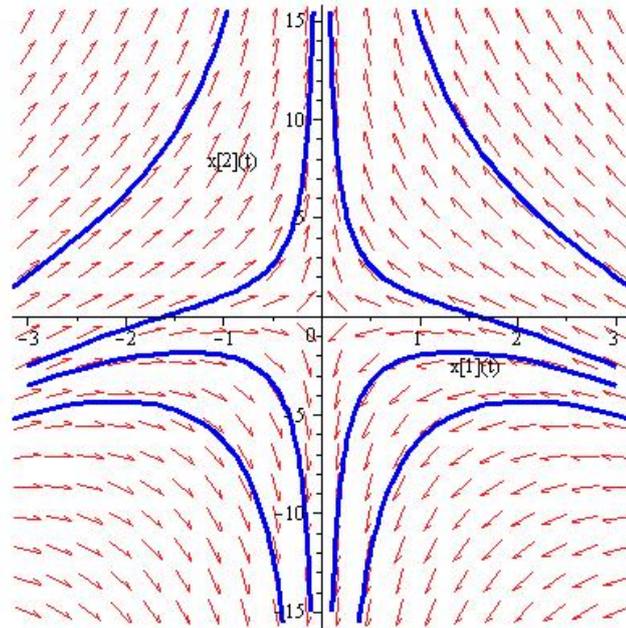
**Definisi 2.7.1** (Verhulst, 1985) *Himpunan  $M \subset D$  disebut himpunan invarian jika untuk sebarang syarat awal  $x_0$  di dalam  $M$ , solusi sistem  $x(t, x_0)$ , tetap berada di dalam  $M$ , untuk setiap  $t \in \mathbb{R}$ .*

Jika  $x(t, x_0) \in M, \forall t \geq 0$ , maka himpunan  $M$  disebut himpunan invarian positif.

**Contoh 2.7.2** Diberikan sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 + x_1^2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Berikut ini adalah potret fase untuk Sistem (2.34).



**Gambar 2.3 Potret Fase untuk Sistem (2.34)**

Garis biru pada Gambar (2.3) menyatakan solusi khusus Sistem (2.34) dengan delapan syarat awal berbeda, yaitu

$$x_1(0) = 3, x_2(0) = 2;$$

$$x_1(0) = -3, x_2(0) = -2;$$

$$x_1(0) = 3, x_2(0) = -5;$$

$$x_1(0) = -3, x_2(0) = -5;$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1;$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = 1;$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -2;$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = -2$$

dan setiap syarat awal menghasilkan suatu grafik.

Solusi Sistem (2.34) dengan syarat awal  $(x_{10}, x_{20})$  adalah

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10}e^{-t} \\ x_2(t) &= x_{20}e^t + \frac{x_{10}^2}{3}(e^t - e^{-2t}). \end{aligned}$$

Diperhatikan himpunan  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2(t) = -\frac{1}{3}x_1^2(t)\}$ . Jika  $(x_{10}, x_{20}) \in S$ , maka  $x_{20} = -\frac{1}{3}x_{10}^2$  dan  $x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ . Karena  $x_2(t) = -\frac{1}{3}x_{10}^2e^{-2t} = -\frac{1}{3}x_1^2(t)$ , maka himpunan  $S$  invarian.

## 2.8. Kriteria Routh-Hurwitz

Perhitungan nilai eigen dari suatu polinomial seringkali tidak mudah dilakukan. Jika hal itu terjadi, maka dapat digunakan metode lain yang dikenal dengan kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz digunakan untuk mengecek langsung kestabilan berdasarkan koefisien polinomial tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada (Olsder, 1998). Diberikan teorema tentang bagian real pembuat nol suatu polinomial sebagai berikut.

**Teorema 2.8.1** (Hanh, 1967) *Jika pembuat nol pada polinomial*

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.35)$$

*mempunyai bagian real negatif, maka*

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0. \quad (2.36)$$

Selanjutnya, tanpa mengurangi keumuman, diambil  $a_0 > 0$  agar semua koefisien dari Polinomial (2.35) bertanda sama, sehingga dapat dibentuk

$$c_{10} = a_0, c_{20} = a_2, c_{30} = a_4, c_{40} = a_6,$$

$$c_{11} = a_1, c_{21} = a_3, c_{31} = a_5, c_{41} = a_7.$$

Jika  $r_2 = \frac{a_0}{a_1}$ , maka

$$c_{12} = a_2 - r_2a_3,$$

$$c_{22} = a_4 - r_2a_5,$$

$$c_{32} = a_6 - r_2a_7.$$

Selanjutnya, dimisalkan  $r_j = \frac{c_{1(j-2)}}{c_{1(j-1)}}$ , sehingga

$$c_{ij} = c_{(i+1)(j-2)} - r_j c_{(i+1)(j-2)},$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ , dan  $c_{1n} = c_n$ .

Jika  $n = m$ , maka  $c_{(m+1)0} = c_{(m+1)1} = c_{(m+1)2} = c_{(m+1)3} = 0$ .

Jika  $n = 2m - 1$ , maka  $c_{m0} = a_{n-1}$ ,  $c_{m1} = a_n$ ,  $c_{m2} = c_{m3} = 0$ .

**Teorema 2.8.2** (Hanh, 1967) *Pembuat nol dari Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika Pertidaksamaan (2.36) dipenuhi dan*

$$c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0.$$

Selanjutnya, diberikan definisi matriks Hurwitz sebagai berikut.

**Definisi 2.8.3** (Gantmacher, 1959) *Diberikan Polinomial (2.35) dengan  $a_0 > 0$  dan  $a_k$  bilangan real, dengan  $k = 1, 2, \dots, n$ . Matriks Hurwitz untuk Polinomial (2.35) didefinisikan sebagai matriks bujur sangkar berukuran  $n \times n$ , yaitu*

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Determinan matriks Hurwitz tingkat ke- $k$  dinotasikan dengan  $\Delta_k$ , dengan  $k = 1, 2, \dots, n$  yang dibentuk dari matriks Hurwitz (2.37) didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |a_1| \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Berikut ini adalah teorema tentang kriteria Routh-Hurwitz yang menjamin pembuat nol Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif.

**Teorema 2.8.4** (*Gantmacher, 1959*) *Pembuat nol dari Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika Pertidaksamaan (2.36) dipenuhi dan*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (2.38)$$

**Bukti.** Diketahui pembuat nol Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif. Akan dibuktikan Pertidaksamaan-pertidaksamaan (2.36) dan (2.38) dipenuhi. Berdasarkan Teorema 2.8.1, Pertidaksamaan (2.36) jelas dipenuhi. Berdasarkan Definis 2.8.3, Polinomial (2.35) dapat dibentuk menjadi matriks Hurwitz (2.37). Selanjutnya, matriks Hurwitz (2.37) diubah ke dalam bentuk matriks singular. Langkah pertama yaitu dengan menjumlahkan kolom ke-2, 4, ... secara berturut-turut dengan hasil perkalian negatif dari  $r_2 = \frac{a_0}{a_1}$  dengan kolom ke-1, 3, ... Selanjutnya, menjumlahkan kolom ke-2k, dan seterusnya sampai diperoleh nol di atas diagonal utama matriks dan diperoleh  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$  pada diagonal utamanya. Dengan demikian, diperoleh determinan matriks triangular berikut.

$$c_{11} = a_1 = \Delta_1, c_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, c_{13} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, c_{1n} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \quad (2.39)$$

Berdasarkan Persamaan (2.39) diperoleh

$$\Delta_1 = c_{11}, \Delta_2 = c_{12}\Delta_1, \dots, \Delta_n = c_{1n}\Delta_{n-1}.$$

Berdasarkan Teorema 2.8.2, karena  $c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0$ , maka diperoleh

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Jadi, terbukti bahwa jika pembuat nol Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif, maka Pertidaksamaan-pertidaksamaan (2.36) dan (2.38) dipenuhi. Selanjutnya, diketahui Polinomial (2.35) memenuhi Pertidaksamaan-pertidaksamaan (2.36) dan (2.38). Akan dibuktikan bahwa pembuat nol Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif. Diketahui bahwa Polinomial (2.35) memenuhi Pertidaksamaan (2.36) dan  $a_0 > 0$ , artinya  $a_k > 0$  dengan  $k = 1, 2, \dots, n$ . Selanjutnya, berdasarkan Pertidaksamaan (2.38), maka Persamaan (2.39) menjadi

$$\begin{aligned} c_{11} &= \Delta_1 > 0 \\ c_{12} &= \frac{\Delta_2}{\Delta_1} > 0 \\ &\vdots \\ c_{1n} &= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh  $c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0$ , sehingga berdasarkan Teorema 2.8.2, pembuat nol Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif. Jadi, terbukti bahwa jika Polinomial (2.35) memenuhi Pertidaksamaan-pertidaksamaan (2.36) dan (2.38), maka pembuat nol Polinomial (2.35) mempunyai bagian real negatif. ■

**Contoh 2.8.5** Diberikan polinomial

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8 = 0. \quad (2.40)$$

Nilai eigen Persamaan (2.40) adalah  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ , dan  $\lambda_3 = -4$ . Selanjutnya, akan diselidiki bagian real nilai eigen Persamaan (2.40) dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Persamaan (2.35), diperoleh  $a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 14$ , dan  $a_3 = 8$ , sehingga

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{7}{1} = 7 > 0, \frac{a_2}{a_0} = \frac{14}{1} = 14 > 0, \frac{a_3}{a_0} = \frac{8}{1} = 8 > 0.$$

Matriks Hurwitz untuk Persamaan (2.40) adalah

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks  $H$  diperoleh determinan matriks Hurwitz sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |a_1| = 7 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 7(14) - 8(1) = 98 - 8 = 90 > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 8 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 7(14)(8) - 8(8) = 720 > 0.\end{aligned}$$

Karena  $\frac{a_1}{a_0}7 > 0$ ,  $\frac{a_2}{a_0} = 14 > 0$ ,  $\frac{a_3}{a_0} = 8 > 0$  dan  $\Delta_1 = 7 > 0$ ,  $\Delta_2 = 90 > 0$ ,  $\Delta_3 = 720 > 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.8.4 diperoleh bahwa semua bagian real nilai eigen dari Polinomial (2.40) bernilai negatif.

## 2.9. Second Additive Compound Matrix

Misal  $X$  matriks  $m \times n$  dengan entri-entri  $a_{ij}$  bilangan real atau kompleks. Jika  $m = n$ , maka *additive compound matrix* ke- $k$ ,  $X^{[k]}$  dari matriks  $X$  yaitu matriks  ${}^n C_k \times {}^n C_k$  (Muldowney, 2008). Untuk suatu bilangan bulat  $i = 1, \dots, {}^n C_k$ , dipilih  $(i) = (i_1, \dots, i_k)$  sebagai elemen ke- $i$  pada *lexicographic ordering* dari semua  $k$ -tupel bilangan bulat sedemikian sehingga  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ . Jika  $Y = X^{[k]}$ , maka elemen dari  $Y$ ,  $y_{ij}$  adalah sebagai berikut.

1.  $y_{ij} = x_{i_1 i_1} + \dots + x_{i_k i_k}$ , jika  $(i) = (j)$ ,
2.  $y_{ij} = (-1)^{r+s} x_{i_s j_r}$ , jika tepat satu entri  $i_s$  dalam  $(i)$  tidak termasuk dalam  $(j)$  dan  $j_r$  tidak termasuk dalam  $(i)$ ,
3.  $y_{ij} = 0$ , jika  $(i)$  berbeda dari  $(j)$  dalam dua atau lebih entri.

Dalam kasus khusus untuk  $k = 1$ ,  $k = n$ , berlaku

$$X^{[1]} = X, X^{[n]} = tr(X).$$

*Second additive compound matrix* dari matriks  $X$  adalah *additive compound matrix* ke-2 dari matriks  $X$ , dinotasikan dengan  $X^{[2]}$ .

**Contoh 2.9.1** Diberikan matriks berukuran  $3 \times 3$

$$X^{[1]} = X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh  $n = 3$  dan karena akan dicari *second additive compound matrix*  $X^{[2]}$ , maka  $k = 2$  sehingga diperoleh  ${}^n C_k = {}^3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ . Selanjutnya, diperhatikan tabel berikut.

**Tabel 2.1** Penentuan *Second Additive Compound Matrix*

$i = 1, 2, 3; i = (i_1, i_2)$	$j = 1, 2, 3; j = (j_1, j_2)$
$(1) = (1, 2) = (1_1, 1_2)$	$(1) = (1, 2) = (1_1, 1_2)$
$(2) = (1, 3) = (2_1, 2_2)$	$(2) = (1, 3) = (2_1, 2_2)$
$(3) = (2, 3) = (3_1, 3_2)$	$(3) = (2, 3) = (3_1, 3_2)$

Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh

1. jika  $i = 1, j = 1$ , maka

$$y_{11} = x_{1_1 1_1} + x_{1_2 1_2} = x_{11} + x_{22} = a_{11} + a_{22},$$

2. jika  $i = 2, j = 2$ , maka

$$y_{22} = x_{2_1 2_1} + x_{2_2 2_2} = x_{11} + x_{33} = a_{11} + a_{33},$$

3. jika  $i = 3, j = 3$ , maka

$$y_{33} = x_{3_1 3_1} + x_{3_2 3_2} = x_{22} + x_{33} = a_{22} + a_{33},$$

4. jika  $i = 1, j = 2$ , maka

$$y_{12} = (-1)^{2+2} x_{1_2 2_2} = x_{23} = a_{23},$$

5. jika  $i = 1, j = 3$ , maka

$$y_{13} = (-1)^{1+2} x_{1_1 3_2} = -x_{13} = -a_{13},$$

6. jika  $i = 2, j = 1$ , maka

$$y_{21} = (-1)^{2+2}x_{2_21_2} = x_{32} = a_{32},$$

7. jika  $i = 2, j = 3$ , maka

$$y_{23} = (-1)^{1+1}x_{2_13_1} = x_{12} = a_{12},$$

8. jika  $i = 3, j = 1$ , maka

$$y_{31} = (-1)^{2+1}x_{3_21_1} = -x_{31} = -a_{31},$$

9. jika  $i = 3, j = 2$ , maka

$$y_{32} = (-1)^{1+1}x_{3_12_1} = x_{21} = a_{21},$$

sehingga diperoleh *second additive compound matrix* dari matriks  $X$  yaitu

$$X^{[2]} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Selanjutnya, diberikan Lemma yang berhubungan dengan *second additive compound matrix* yang digunakan untuk mengecek bagian real nilai eigen suatu matriks.

**Lemma 2.9.2** (Shi, dkk, 2014) Misal  $M$  matriks berukuran  $3 \times 3$  dengan entri-entri bilangan real. Jika  $tr(M)$ ,  $\det(M)$ , dan  $\det(M^{[2]})$  semuanya negatif, maka semua nilai eigen dari matriks  $M$  mempunyai bagian real yang negatif.

**Contoh 2.9.3** Diberikan matriks  $M$  berukuran  $3 \times 3$  sebagai berikut.

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks  $M$  diperoleh dari polinomial  $\det(M - \lambda I) = 0$  yaitu

$$\det \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 5 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2 - \lambda)(-1 - \lambda)(-4 - \lambda) = 0,$$

sehingga diperoleh tiga nilai eigen yaitu  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$  atau  $\lambda_3 = -4$ . Dengan demikian,  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ , dan  $\text{Re}(\lambda_3) < 0$ .

Selanjutnya, nilai  $\text{tr}(M)$ ,  $\det(M)$ , dan  $\det(M^{[2]})$  adalah sebagai berikut.

1. Nilai  $\text{tr}(M)$

$$\text{tr}(M) = -2 - 1 - 4 = -7 < 0.$$

2. Nilai  $\det(M)$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

3. Nilai  $\det(M^{[2]})$

Berdasarkan Persamaan (2.41) diperoleh *second additive compound matrix* dari matriks  $M$  yaitu

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} -2 - 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 - 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$\det(M^{[2]}) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -90 < 0.$$

Karena  $tr(M) < 0$ ,  $\det(M) < 0$ , dan  $\det(M^{[2]}) < 0$ , maka berdasarkan Lemma 2.9.2 diperoleh bahwa semua nilai eigen dari matriks  $M$  mempunyai bagian real yang negatif.

## 2.10. Model Epidemi

Kejadian penularan penyakit dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis, yaitu model epidemi (Ma dan Li, 2009). Model epidemi dapat digunakan untuk mempertimbangkan strategi-strategi dalam mengendalikan penyebaran penyakit. Model epidemi juga dapat digunakan untuk membantu memprediksi pengendalian penyakit di masa yang akan datang agar tidak terjadi wabah.

Model epidemi yang paling sederhana adalah model  $SI$ . Pada model ini, populasi yang diamati terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu subpopulasi rentan  $S$  (*susceptible*) dan subpopulasi terinfeksi dan menularkan  $I$  (*infectives*). Pada tahun 1927, Kermack-Mckendrick memperluas model  $SI$  menjadi model  $SIR$  dengan menambahkan subpopulasi sembuh  $R$  (*recovery*) (Ma dan Li, 2009). Selanjutnya, model epidemi semakin berkembang disesuaikan dengan sifat-sifat penyakit yang terjadi.

Pada model epidemi terdapat dua jenis titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi. Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium pada saat terdapat penyakit dan penyakit tersebut menyebabkan epidemi pada populasi.

## 2.11. Angka Rasio Reproduksi Dasar

Angka rasio reproduksi dasar ( $R_0$ ) adalah rata-rata jumlah infeksi kedua yang dihasilkan oleh satu individu terinfeksi dan menularkan dalam keseluruhan subpopulasi rentan (Ma dan Li, 2009). Angka ini menyatakan ukuran potensi terjadinya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit tidak akan menyebar. Jika  $R_0 > 1$ , maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat

seiring bertambahnya waktu dan penyakit akan menyebar.

Nilai  $R_0$  kadangkala dapat ditemukan pada saat menghitung nilai eigen matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit. Cara lain yang dapat digunakan yaitu dengan menghitung radius spektral dari metode matriks generasi berikutnya (*the next generation matrix method*) (Brauer, dkk, 1945).

**Definisi 2.11.1** (Brauer, dkk, 1945) Misalkan  $M$  matriks berukuran  $n \times n$  dan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  adalah nilai-nilai eigen matriks  $M$ . Radius spektral matriks  $M$  didefinisikan sebagai

$$\rho(M) = \max\{|\lambda_i|\}, i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan  $|\lambda_i|$  adalah modulus dari  $\lambda_i$ .

Pada metode matriks generasi berikutnya, suatu kompartemen disebut kompartemen penyakit jika individu di dalamnya terinfeksi. Misalkan terdapat  $n$  kompartemen penyakit dan  $m$  kompartemen nonpenyakit, dengan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dan  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  adalah subpopulasi pada masing-masing kompartemen tersebut. Model kompartemen dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Matriks  $\mathcal{F}$  menyatakan infeksi baru yang terjadi. Dalam hal ini, tingkat infeksi kedua menambah jumlah subpopulasi terinfeksi dan menularkan. Matriks  $\mathcal{V}$  menyatakan perpindahan ke dalam dan ke luar kelas infeksi dan menularkan. Dalam hal ini, tingkat perkembangan penyakit, kematian, dan kesembuhan mengurangi jumlah subpopulasi terinfeksi dan menularkan.

Misalkan titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (2.42) adalah  $E_0 = (\mathbf{0}, \mathbf{y}^*)$ . Selanjutnya, didefinisikan

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{F}_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{0}, \mathbf{y}^*)}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{0}, \mathbf{y})},$$

dengan  $F$  adalah matriks nonnegatif dan  $V$  adalah matriks nonsingular.

Matriks generasi berikutnya adalah  $M = FV^{-1}$ . Angka rasio reproduksi dasar diperoleh dari

$$R_0 = \rho(M),$$

dengan  $\rho$  radius spektral dari  $M$ .

**Contoh 2.11.2** Diberikan model *SEIR* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Pi - \mu S - \beta SI \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\mu + \kappa)E \\ \frac{dI}{dt} &= \kappa E - (\mu + \alpha)I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R, \end{aligned} \tag{2.43}$$

dengan  $N = S + E + I + R$ . Dalam hal ini parameter  $\Pi$ ,  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ , dan  $\alpha$  berturut-turut menyatakan laju kelahiran, tingkat kematian alami, laju kontak, tingkat perubahan individu dari laten menjadi terinfeksi dan menularkan, dan tingkat kesembuhan.

Berdasarkan Sistem (2.43) diperoleh

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix},$$

sehingga dapat dibentuk model kompartemen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \beta SI - (\mu + \kappa)E \\ \kappa E - (\mu + \alpha)I \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \Pi - \mu S - \beta SI \\ \alpha I - \mu R \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Selanjutnya, Persamaan (2.44) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu + \kappa)E \\ -\kappa E + (\mu + \alpha)I \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

dengan  $\mathcal{F}$  menyatakan infeksi baru yang terjadi dan  $\mathcal{V}$  menyatakan perkembangan penyakit, kematian, dan kesembuhan.

Berdasarkan Persamaan (2.46) diperoleh

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathcal{V}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu + \kappa)E \\ -\kappa E + (\mu + \alpha)I \end{bmatrix},$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + \kappa & 0 \\ -\kappa & \mu + \alpha \end{bmatrix}.$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (2.43) adalah  $E_0 = \left(\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ . Dengan demikian, diperoleh matriks  $F$  dan  $V$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0, 0\right)} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 V &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\Pi}{\mu}, 0, 0, 0\right)} \\
 &= \begin{bmatrix} \mu + \kappa & 0 \\ -\kappa & \mu + \alpha \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Matriks generasi berikutnya untuk Sistem (2.43) adalah

$$\begin{aligned}
 M &= FV^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu + \kappa & 0 \\ -\kappa & \mu + \alpha \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(\mu + \kappa)(\mu + \alpha)} \begin{bmatrix} \mu + \alpha & 0 \\ \kappa & \mu + \kappa \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \beta \frac{\Pi}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu + \kappa} & 0 \\ \frac{\kappa}{(\mu + \kappa)(\mu + \alpha)} & \frac{1}{\mu + \alpha} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\beta \Pi \kappa}{\mu(\mu + \kappa)(\mu + \alpha)} & \frac{\beta \Pi}{\mu(\mu + \alpha)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nilai eigen matriks  $M$  diperoleh dari persamaan berikut.

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)} & \frac{\beta\Pi}{\mu(\mu+\alpha)} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)} - \lambda & \frac{\beta\Pi}{\mu(\mu+\alpha)} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda \left( \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)} - \lambda \right) = 0,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai eigen matriks  $M$  yaitu

$$\lambda_1 = 0$$

atau

$$\lambda_2 = \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)}.$$

Nilai angka rasio reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral matriks  $M$ ,  $\rho(M)$  yaitu

$$\begin{aligned}
\rho(M) &= maks \{ \lambda_1, \lambda_2 \} \\
&= maks \left\{ 0, \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)} \right\} \\
&= \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai angka rasio reproduksi dasar untuk Sistem (2.43) adalah

$$R_0 = \frac{\beta\Pi\kappa}{\mu(\mu+\kappa)(\mu+\alpha)}.$$

## 2.12. Fungsi Respon

Fungsi respon adalah meningkatnya jumlah mangsa yang dimakan oleh sejumlah pemangsa pada kepadatan mangsa yang berbeda-beda sampai dengan batas yang dapat menunjukkan konsumsi mangsa maksimal dalam waktu yang ditentukan. Hal-hal yang mempengaruhi pemangsaan oleh pemangsa diantaranya kerapatan populasi mangsa, kerapatan populasi pemangsa, sifat mangsa yang memiliki

reaksi yang sama dengan pemangsa, jumlah dan kualitas makanan pengganti yang tersedia untuk pemangsa, dan sifat pemangsa seperti jenis makanan yang disukai dan efisien dalam menyerang (Holling, 1959). Dengan demikian, populasi mangsa tidak selamanya meningkat atau tidak selamanya menurun.

Fungsi respon dibagi menjadi tiga tipe umum (Holling, 1959), yaitu

1. Fungsi Respon Linier (Tipe I)

Laju pemangsaan pemangsa meningkat sebanding dengan kerapatan mangsa sampai mencapai tingkat kejenuhan. Jumlah mangsa tidak berubah saat pemangsa kenyang.

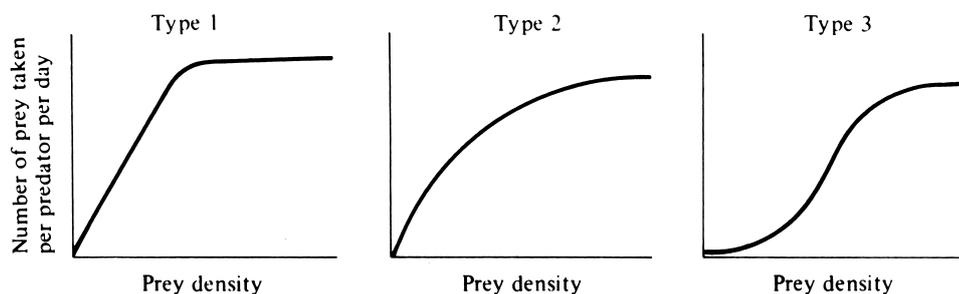
2. Fungsi Respon Hiperbolik (Tipe II)

Laju pemangsaan secara progresif semakin menurun. Ini berarti, pemangsaan seekor pemangsa meningkat seiring dengan meningkatnya ketersediaan mangsa, tetapi pemangsaan semakin menurun saat mendekati kenyang. Tingkat pemangsaan oleh pemangsa dipengaruhi oleh ketersediaan mangsa. Jika kerapatan mangsa meningkat, maka jumlah mangsa yang dimakan pemangsa semakin meningkat. Namun seiring berjalannya waktu, pemangsa akan mengalami kekenyangan yang mengakibatkan daya cari pemangsa semakin menurun sehingga waktu yang diperlukan pemangsa untuk memangsa lebih lama. Laju pemangsaan adalah waktu yang diperlukan pemangsa untuk mengejar, menaklukan, dan memakan setiap individu mangsa. Fungsi respon ini sangat umum dimiliki oleh pemangsa serangga.

3. Fungsi Respon Sigmoida (Tipe III)

Perubahan pemangsaan berlangsung lambat diikuti dengan peningkatan sampai asimtotik.

Gambar berikut mengilustrasikan tiga tipe fungsi respon.



Gambar 2.4 Fungsi Respon Holling Tipe I, II, dan III

Model mangsa pemangsa yang paling sederhana adalah model Lotka Volterra. Selanjutnya, akan dijelaskan pembentukan fungsi respon hiperbolik (Tipe II). Diperhatikan model Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -py + q\alpha xy. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pada Sistem (2.47),  $x(t)$  menyatakan kepadatan populasi mangsa pada saat  $t$ ,  $\frac{dx}{dt}$  menyatakan perubahan kepadatan populasi mangsa terhadap waktu,  $y(t)$  menyatakan kepadatan populasi pemangsa pada saat  $t$ , dan  $\frac{dy}{dt}$  menyatakan perubahan kepadatan populasi pemangsa terhadap waktu. Konstanta  $r$ ,  $\alpha$ ,  $p$ , dan  $q$  bernilai positif, dengan  $r$  adalah tingkat pertumbuhan alami populasi mangsa,  $p$  adalah tingkat kematian alami pemangsa,  $q$  adalah tingkat pertumbuhan populasi pemangsa, dan  $\alpha$  adalah tingkat penangkapan mangsa oleh pemangsa. Selain itu,  $xy$  menyatakan interaksi antara mangsa dan pemangsa.

Berdasarkan Sistem (2.47), respon yang terjadi merupakan fungsi respon linier (Tipe I). Representatif populasi mangsa yang ditangkap pemangsa dari Model Lotka-Volterra (2.47) adalah  $\alpha x$ , dimisalkan  $N_\alpha$ , yang tidak bergantung pada waktu mencari mangsa. Di lain pihak, pemangsa memerlukan waktu untuk menangkap mangsa, sehingga  $N_\alpha$  dimodifikasi menjadi representatif baru yang bergantung pada waktu mencari mangsa, angka penangkapan mangsa, dan populasi mangsa yang tersedia, dinotasikan  $N_\beta$ . Ini berarti, populasi mangsa yang ditangkap per pemangsa akan berbanding lurus dengan tingkat penangkapan mangsa oleh pemangsa, dino-

tasikan dengan  $\alpha$ , populasi mangsa yang tersedia, dinotasikan dengan  $x$ , dan waktu yang digunakan untuk mencari mangsa, yaitu  $T_x$ . Dengan demikian, diperoleh representatif baru yaitu

$$N_\beta = \alpha x T_x, \quad (2.48)$$

dengan  $N_\beta$  menyatakan populasi mangsa yang ditangkap pemangsa per satuan waktu.

Selanjutnya, dimisalkan  $T$  adalah keseluruhan waktu yang tersedia bagi pemangsa untuk mencari dan menangkap mangsa,  $T_x$  adalah waktu yang digunakan untuk mencari mangsa, dan  $T_k$  adalah waktu yang digunakan untuk mengejar, mengolah, menghisap, dan mencerna. Parameter  $T_k$  bergantung pada populasi mangsa yang ditangkap pemangsa ( $N_\alpha$ ), sehingga diperoleh

$$T_x = T - T_k N_\alpha. \quad (2.49)$$

Berdasarkan Persamaan-persamaan (2.48) dan (2.49) diperoleh

$$\begin{aligned} N_\beta &= \alpha x T_x \\ \Leftrightarrow N_\beta &= \alpha x (T - T_k N_\alpha) \\ \Leftrightarrow N_\beta &= \alpha x T - \alpha x T_k N_\alpha \\ \Leftrightarrow N_\beta + \alpha x T_k N_\alpha &= \alpha x T \\ \Leftrightarrow N_\beta \left( 1 + \frac{N_\alpha}{N_\beta} \alpha x T_k \right) &= \alpha x T \\ \Leftrightarrow \frac{N_\beta}{T} &= \frac{\alpha x}{\left( 1 + \frac{N_\alpha}{N_\beta} \alpha x T_k \right)} \\ \Leftrightarrow \frac{N_\beta}{T} &= \frac{\alpha x}{(1 + h \alpha x)}, \end{aligned}$$

dengan  $h = \frac{N_\alpha T_k}{N_\beta}$  dan  $\frac{N_\beta}{T}$  adalah laju pemangsaan pemangsa atau populasi mangsa yang ditangkap pemangsa per satuan waktu bergantung mangsa. Selanjutnya dibentuk persamaan

$$g(x) = \frac{\alpha x}{(1 + h \alpha x)}, \quad (2.50)$$

dengan  $h$  menyatakan penanganan dan penangkapan mangsa oleh pemangsa,  $g(x)$  menyatakan banyaknya mangsa yang diserang pemangsa per satuan waktu,  $\alpha$  menyatakan tingkat penangkapan mangsa oleh pemangsa. Jadi, Persamaan (2.50) menyatakan fungsi Holling Tipe II untuk interaksi mangsa pemangsa.

## BAB III

### MODEL EPIDEMI PADA TANAMAN

Model epidemi pada tanaman dapat disajikan secara matematis dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier.

#### 3.1. Asumsi Model

Kelompok individu pada model epidemi pada tanaman dibagi menjadi lima kelompok, yaitu subpopulasi inang rentan  $S$  (*susceptible*), subpopulasi inang terinfeksi dan menularkan  $I$  (*infectives*), subpopulasi inang sembuh  $R$  (*recovery*), subpopulasi hama rentan  $P$ , dan subpopulasi hama terinfeksi dan menularkan  $Q$ . Asumsi-asumsi yang digunakan dalam penurunan model epidemi pada tanaman adalah sebagai berikut.

1. Total jumlah inang konstan setiap saat.
2. Tingkat kelahiran inang sama dengan tingkat kematian alami inang. Setiap inang yang mati karena penyakit akan digantikan oleh inang baru dengan jumlah yang sama.
3. Setiap tanaman inang baru akan menjadi inang rentan.
4. Inang rentan tidak hanya dapat terinfeksi oleh hama terinfeksi dan menularkan, tetapi juga oleh inang terinfeksi dan menularkan.
5. Hama rentan hanya dapat terinfeksi oleh inang terinfeksi dan menularkan, dan setelah terinfeksi, hama tersebut akan terus terinfeksi selama sisa hidupnya. Lebih lanjut, diasumsikan tidak terjadi penularan vertikal, yaitu dari hama ke hama.

6. Tingkat kelahiran hama konstan dan setiap hama baru yang lahir akan menjadi hama rentan.
7. Ketika hama rentan menggigit inang terinfeksi, hama tersebut dapat terinfeksi dengan tingkat perpindahan mengikuti Holling Tipe II.
8. Ketika inang rentan berinteraksi dengan inang terinfeksi, inang tersebut dapat terinfeksi dengan tingkat perpindahan mengikuti Holling Tipe II.

### 3.2. Variabel dan Parameter

Variabel-variabel yang digunakan untuk menurunkan model epidemi pada tanaman bernilai nonnegatif, sedangkan parameter-parameternya bernilai positif, yang disajikan dalam tabel berikut.

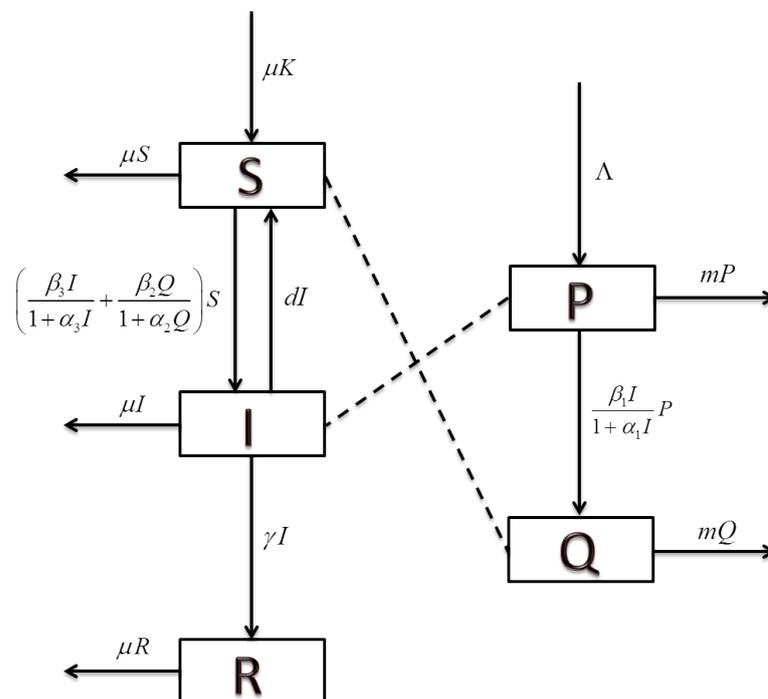
**Tabel 3.1 Daftar Variabel dan Parameter**

<b>Simbol</b>	<b>Definisi</b>	<b>Jenis</b>	<b>Satuan</b>
$S$	jumlah inang rentan	variabel	pohon
$I$	jumlah inang terinfeksi dan menularkan	variabel	pohon
$R$	jumlah inang sembuh	variabel	pohon
$K$	total jumlah inang	variabel	pohon
$P$	jumlah hama rentan	variabel	ekor
$Q$	jumlah hama terinfeksi dan menularkan	variabel	ekor
$N$	total jumlah hama	variabel	ekor
$\beta_1$	rasio infeksi antara inang terinfeksi dan menularkan dengan hama rentan	parameter	per pohon per waktu
$\beta_2$	tingkat gigitan hama terinfeksi dan menularkan terhadap inang rentan	parameter	per ekor per waktu
$\beta_3$	kejadian infeksi antara inang terinfeksi dan menularkan dengan inang rentan	parameter	per pohon per waktu
$\alpha_1$	level kekuatan penyerapan infeksi antara inang terinfeksi dan menularkan dengan hama rentan	parameter	per pohon
$\alpha_2$	level kekuatan penyerapan infeksi hama terinfeksi dan menularkan terhadap inang rentan	parameter	per pohon

Simbol	Definisi	Jenis	Satuan
$\alpha_3$	level kekuatan penyerapan infeksi antara inang terinfeksi dan menularkan dengan inang rentan	parameter	per pohon
$\gamma$	tingkat perubahan inang terinfeksi dan menularkan menjadi inang sembuh (tingkat kesembuhan)	parameter	per waktu
$\mu$	tingkat kematian alami inang	parameter	per waktu
$\Lambda$	kelahiran atau imigrasi hama	parameter	ekor per waktu
$m$	tingkat kematian alami hama	parameter	per waktu
$d$	tingkat kematian inang karena penyakit	parameter	per waktu

### 3.3. Penurunan Model

Skema penularan penyakit dari model epidemi pada tanaman adalah sebagai berikut.



Gambar 3.1 Diagram Kompartemen Model Epidemi pada Tanaman

Penurunan model dilakukan dengan memperhatikan faktor-faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah setiap kelompok pada populasi. Faktor-faktor yang

menyebabkan perubahan jumlah setiap kelompok pada populasi adalah sebagai berikut.

1. Faktor-faktor yang menyebabkan perubahan jumlah inang rentan  $S$

Penambahan jumlah inang rentan  $S$  dipengaruhi oleh

- (a) banyaknya inang lahir dengan tingkat kelahiran yang sama dengan tingkat kematian alami inang sebesar  $\mu$  dan
- (b) banyaknya inang baru yang menggantikan inang terinfeksi dan menularkan  $I$  yang mati karena penyakit dengan tingkat kematian karena penyakit sebesar  $d$ .

Pengurangan jumlah inang rentan  $S$  dipengaruhi oleh

- (a) banyaknya inang rentan  $S$  yang mati alami dengan tingkat kematian alami sebesar  $\mu$  dan
- (b) banyaknya inang rentan  $S$  yang terinfeksi akibat berinteraksi dengan inang terinfeksi dan menularkan  $I$  dan hama terinfeksi dan menularkan  $Q$  dengan tingkat perpindahan mengikuti Holling Tipe II, yaitu

$$\frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I}.$$

Dengan demikian, diperoleh laju perubahan jumlah inang rentan terhadap waktu yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI. \quad (3.1)$$

2. Faktor-faktor yang menyebabkan perubahan jumlah inang terinfeksi dan menularkan  $I$

Penambahan jumlah inang terinfeksi dan menularkan  $I$  dipengaruhi oleh banyaknya inang rentan  $S$  yang terinfeksi akibat berinteraksi dengan inang terinfeksi dan menularkan  $I$  dan hama terinfeksi dan menularkan  $Q$  dengan tingkat perpindahan mengikuti Holling Tipe II, yaitu

$$\frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I}.$$

Pengurangan jumlah inang rentan  $S$  dipengaruhi oleh

- (a) banyaknya inang baru yang menggantikan inang terinfeksi dan menularkan  $I$  yang mati karena penyakit dengan tingkat kematian karena penyakit sebesar  $d$ ,
- (b) banyaknya inang terinfeksi dan menularkan  $I$  yang mati alami dengan tingkat kematian alami sebesar  $\mu$ , dan
- (c) banyaknya inang terinfeksi dan menularkan  $I$  yang mengalami kesembuhan dengan tingkat kesembuhan sebesar  $\gamma$ .

Dengan demikian, diperoleh laju perubahan jumlah inang terinfeksi dan menularkan terhadap waktu yaitu

$$\frac{dI}{dt} = \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - (d + \mu + \gamma) I. \quad (3.2)$$

### 3. Faktor-faktor yang menyebabkan perubahan jumlah inang sembuh $R$

Penambahan jumlah inang sembuh  $R$  dipengaruhi oleh banyaknya inang terinfeksi dan menularkan  $I$  yang mengalami kesembuhan dengan tingkat kesembuhan sebesar  $\gamma$ .

Pengurangan jumlah inang sembuh  $R$  dipengaruhi oleh banyaknya inang sembuh  $I$  yang mati alami dengan tingkat kematian alami sebesar  $\mu$ .

Dengan demikian, diperoleh laju perubahan jumlah inang sembuh terhadap waktu yaitu

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \quad (3.3)$$

### 4. Faktor-faktor yang menyebabkan perubahan kepadatan hama rentan $P$

Penambahan kepadatan hama rentan  $P$  dipengaruhi oleh kelahiran atau imigrasi hama sebesar  $\Lambda$ .

Pengurangan kepadatan hama rentan  $P$  dipengaruhi oleh

- (a) banyaknya hama rentan  $P$  yang mati alami dengan tingkat kematian alami sebesar  $m$  dan

- (b) banyaknya hama rentan  $P$  yang terinfeksi karena menggigit inang terinfeksi dan menularkan  $I$  dengan tingkat perpindahan mengikuti Holling Tipe II, yaitu

$$\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I}.$$

Dengan demikian, diperoleh laju perubahan kepadatan hama rentan terhadap waktu yaitu

$$\frac{dP}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} P - mP. \quad (3.4)$$

5. Faktor-faktor yang menyebabkan perubahan kepadatan hama terinfeksi dan menularkan  $Q$

Penambahan kepadatan hama terinfeksi dan menularkan  $Q$  dipengaruhi oleh banyaknya hama rentan  $P$  yang terinfeksi karena menggigit inang terinfeksi dan menularkan  $I$  dengan tingkat perpindahan mengikuti Holling Tipe II, yaitu

$$\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I}.$$

Pengurangan kepadatan hama terinfeksi dan menularkan  $Q$  dipengaruhi oleh banyaknya hama terinfeksi dan menularkan  $Q$  yang mati alami dengan tingkat kematian alami sebesar  $m$ .

Dengan demikian, diperoleh laju perubahan kepadatan hama terinfeksi dan menularkan terhadap waktu yaitu

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} P - mQ. \quad (3.5)$$

Berdasarkan Persamaan-persamaan (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), dan (3.5), diperoleh model epidemi pada tanaman berupa sistem persamaan diferensial nonlinier yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI \\
\frac{dI}{dt} &= \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - (d + \mu + \gamma) I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \\
\frac{dP}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} P - mP \\
\frac{dQ}{dt} &= \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} P - mQ.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Karena  $K = S + I + R$ , maka dengan menjumlahkan persamaan pertama, kedua, dan ketiga pada Sistem (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \\
&= \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI + \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S \\
&\quad - (d + \mu + \gamma) I + \gamma I - \mu R \\
&= \mu(K - S) - \mu I - \mu R \\
&= \mu K - \mu(S + I + R) \\
&= \mu K - \mu K \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena  $\frac{dK}{dt} = 0$ , maka total jumlah inang untuk setiap saat adalah konstan.

Karena  $N = P + Q$ , maka dengan menjumlahkan persamaan keempat dan kelima pada Sistem (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \frac{dP}{dt} + \frac{dQ}{dt} \\
&= \Lambda - \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} P - mP + \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} P - mQ \\
&= \Lambda - m(P + Q) \\
&= \Lambda - mN.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk  $t \rightarrow \infty$ , diperoleh  $N \rightarrow \frac{\Lambda}{m}$ . Dengan kata lain,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N = \frac{\Lambda}{m}$ .

Karena untuk  $t \rightarrow \infty$ , nilai  $R$  dapat diperoleh dari  $R = K - (S + I)$  dan nilai  $P$  dapat diperoleh dari  $P = N - Q = \frac{\Lambda}{m} - Q$ , maka Sistem (3.6) dapat direduksi menjadi sistem berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI \\ \frac{dI}{dt} &= \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ\end{aligned}\quad (3.7)$$

dengan  $\omega = d + \mu + \gamma$ .

Diperhatikan bahwa  $S \geq 0$ ,  $I \geq 0$ ,  $R \geq 0$ ,  $P \geq 0$ , dan  $Q \geq 0$ , sehingga  $S + I \geq 0$ . Selanjutnya, karena  $K = S + I + R$ , maka  $S + I \leq K$ . Lebih lanjut,  $S + I = K$  terpenuhi jika tidak ada individu di kompartemen  $R$ . Karena  $\frac{\Lambda}{m} = P + Q$ , maka  $Q \leq \frac{\Lambda}{m}$ , sehingga himpunan

$$\Omega = \left\{ (S, I, Q) \in R_+^3 : 0 \leq S + I \leq K, 0 \leq Q \leq \frac{\Lambda}{m} \right\}$$

adalah himpunan tertutup.

**Teorema 3.3.1** *Himpunan tertutup  $\Omega$  adalah himpunan invarian positif.*

**Bukti.** Diambil sebarang  $(S(t_0), I(t_0), Q(t_0)) \in \Omega$ . Ini berarti  $0 \leq S(t_0) + I(t_0) \leq K$  dan  $0 \leq Q(t_0) \leq \frac{\Lambda}{m}$ . Akan ditunjukkan solusi Sistem (3.7) memenuhi  $(S(t), I(t), Q(t)) \in \Omega$ . Dengan kata lain, akan ditunjukkan  $0 \leq S(t) + I(t) \leq K$  dan  $0 \leq Q(t) \leq \frac{\Lambda}{m}$ .

Diketahui  $K(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ . Karena untuk setiap  $t$ , nilai  $K$  konstan, maka  $K = S(t) + I(t) + R(t)$ . Selanjutnya, karena  $S(t) \geq 0$ ,  $I(t) \geq 0$ , dan  $Q(t) \geq 0$  maka diperoleh

$$0 \leq S(t) + I(t) \leq K. \quad (3.8)$$

Di lain pihak, diketahui

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{\Lambda}{m} - Q(t) \\ \Leftrightarrow \frac{\Lambda}{m} &= P(t) + Q(t).\end{aligned}$$

Dengan demikian, karena  $P(t) \geq 0$  dan  $Q(t) \geq 0$ , maka diperoleh

$$0 \leq Q(t) \leq \frac{\Lambda}{m}. \quad (3.9)$$

Berdasarkan Persamaan-persamaan (3.8) dan (3.9), dapat disimpulkan bahwa jika nilai awal  $(S(t_0), I(t_0), Q(t_0)) \in \Omega$  dengan  $0 \leq S(t_0) + I(t_0) \leq K$  dan  $0 \leq Q(t_0) \leq \frac{\Lambda}{m}$ , maka solusi Sistem (3.7) memenuhi  $(S(t), I(t), Q(t)) \in \Omega$  dengan  $0 \leq S(t) + I(t) \leq K$  dan  $0 \leq Q(t) \leq \frac{\Lambda}{m}$ . Jadi, berdasarkan Definisi 2.7.1, himpunan  $\Omega = \left\{ (S, I, Q) \in R_+^3 : 0 \leq S + I \leq K, 0 \leq Q \leq \frac{\Lambda}{m} \right\}$  adalah himpunan invarian. Karena solusi Sistem (3.7) memenuhi  $(S(t), I(t), Q(t)) \in \Omega$  untuk setiap  $t \geq 0$ , maka terbukti bahwa himpunan  $\Omega$  adalah himpunan invarian positif untuk Sistem (3.7). ■

### 3.4. Titik Ekuilibrium dan Angka Rasio Reproduksi Dasar Model Epidemi pada Tanaman

Model epidemi pada tanaman berupa sistem persamaan diferensial nonlinier. Sistem tersebut mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

Berdasarkan Definisi 2.3.1 tentang titik ekuilibrium, maka titik ekuilibrium untuk model epidemi tanaman pada Sistem (3.7) diperoleh jika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (3.10)$$

Jika  $\frac{dS}{dt} = 0$ , maka diperoleh

$$\mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI = 0. \quad (3.11)$$

Jika  $\frac{dI}{dt} = 0$ , maka diperoleh

$$\left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I = 0. \quad (3.12)$$

Jika  $\frac{dQ}{dt} = 0$ , maka diperoleh

$$\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ = 0. \quad (3.13)$$

### 3.4.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium pada saat tidak ada penyakit dalam populasi. Dengan kata lain, jumlah inang terinfeksi dan menularkan adalah nol ( $I = 0$ ).

**Teorema 3.4.1** *Titik ekuilibrium bebas penyakit dari Sistem (3.7) yaitu*

$$E_0 = (S^*, I^*, Q^*) = (K, 0, 0).$$

**Bukti.** Jika  $I = 0$  disubstitusikan ke Persamaan (3.13), maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_1 \cdot 0}{1 + \alpha_1 \cdot 0} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ = 0 \\ \Leftrightarrow & -mQ = 0 \\ \Leftrightarrow & Q = 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menyubstitusikan  $I = 0$  dan  $Q = 0$  ke Persamaan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned} & \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 \cdot 0}{1 + \alpha_2 \cdot 0} + \frac{\beta_3 \cdot 0}{1 + \alpha_3 \cdot 0} \right) S + d \cdot 0 = 0 \\ \Leftrightarrow & \mu K = \mu S \\ \Leftrightarrow & S = K. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit untuk model epidemi pada tanaman adalah  $E_0 = (S^*, I^*, Q^*) = (K, 0, 0)$ . ■

### 3.4.2. Angka Rasio Reproduksi Dasar

Diberikan model pada Sistem (3.7). Penurunan angka rasio reproduksi dasar dilakukan dengan terlebih dahulu melakukan pengelompokan subpopulasi menjadi kompartemen  $x$  dan  $y$ , yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}, \\ y &= S, \end{aligned}$$

sehingga dapat dibentuk model kompartemen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I \\ \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI. \quad (3.15)$$

Selanjutnya, Persamaan (3.14) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathcal{F}(\mathbf{x}, y) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, y) \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega I \\ -\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) + mQ \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dengan  $\mathcal{F}$  menyatakan infeksi baru yang terjadi dan  $\mathcal{V}$  menyatakan perkembangan penyakit, kematian, dan kesembuhan. Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{x}, y) &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(\mathbf{x}, y) \\ \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{V}(\mathbf{x}, y) &= \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1(\mathbf{x}, y) \\ \mathcal{V}_2(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega I \\ -\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) + mQ \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} J_{1(\mathbf{x}, y)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_3 S(1 + \alpha_3 I) - \beta_3 S I(\alpha_3)}{(1 + \alpha_3 I)^2} & \frac{\beta_2 S(1 + \alpha_2 Q) - \beta_2 S Q(\alpha_2)}{(1 + \alpha_2 Q)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ J_{2(\mathbf{x}, y)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ -\left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) \left( \frac{\beta_1(1 + \alpha_1 I) - \beta_1 I(\alpha_1)}{(1 + \alpha_1 I)^2} \right) & \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} + m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (3.7) adalah  $E_0 = (K, 0, 0)$ . Dengan demikian, diperoleh matriks  $F$  dan  $V$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 F &= J_{1(E_0)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \\ \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, y) = (K, 0, 0)} \\
 &= \begin{bmatrix} \beta_3 K & \beta_2 K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 V &= J_{2(E_0)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \\ \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial I}(\mathbf{x}, y) & \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial Q}(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, y) = (K, 0, 0)} \\
 &= \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ -\frac{\Lambda \beta_1}{m} & m \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Matriks generasi berikutnya untuk Sistem (3.7) adalah

$$\begin{aligned}
 M &= FV^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \beta_3 K & \beta_2 K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ -\frac{\Lambda \beta_1}{m} & m \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \beta_3 K & \beta_2 K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\omega m} \begin{bmatrix} m & 0 \\ \frac{\Lambda \beta_1}{m} & \omega \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \beta_3 K & \beta_2 K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ \frac{\Lambda \beta_1}{\omega m^2} & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} & \frac{\beta_2 K}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nilai eigen matriks  $M$  diperoleh dari persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
 \det(M - \lambda I) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} & \frac{\beta_2 K}{m} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} - \lambda & \frac{\beta_2 K}{m} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \left( \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} - \lambda \right) = 0,$$

sehingga diperoleh nilai eigen matriks  $M$  yaitu

$$\lambda_1 = 0$$

atau

$$\lambda_2 = \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2}.$$

Nilai angka rasio reproduksi dasar diperoleh dari radius spektral matriks  $M$ ,  $\rho(M)$  yaitu

$$\begin{aligned} \rho(M) &= \text{maks} \{ \lambda_1, \lambda_2 \} \\ &= \text{maks} \left\{ 0, \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} \right\} \\ &= \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai angka rasio reproduksi dasar untuk Sistem (3.7) adalah

$$R_0 = \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2}.$$

### 3.4.3. Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium pada saat terdapat penyakit dan penyakit tersebut menyebabkan epidemi pada populasi.

**Teorema 3.4.2** *Titik ekuilibrium endemik dari Sistem (3.7) yaitu  $E_1 = (S^*, I^*, Q^*)$ , dengan*

$$\begin{aligned} S^* &= K - \left( 1 + \frac{\gamma}{\mu} \right) I^*, \\ I^* &= \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4TW}}{2T}, \\ Q^* &= \frac{\beta_1 \Lambda I^*}{m^2 (1 + \alpha_1 I^*) + m \beta_1 I^*}. \end{aligned}$$

**Bukti.** Jika Persamaan-persamaan (3.11) dan (3.12) dijumlahkan, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI + \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S \\
& - \omega I = 0 \\
\Leftrightarrow & \mu(K - S) + dI - \omega I = 0 \\
\Leftrightarrow & \mu(K - S) + dI - (d + \mu + \gamma)I = 0 \\
\Leftrightarrow & \mu(K - S) - (\mu + \gamma)I = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\mu(K - S)}{\mu} - \frac{(\mu + \gamma)I}{\mu} = 0 \\
\Leftrightarrow & K - S - \left( 1 + \frac{\gamma}{\mu} \right) I = 0 \\
\Leftrightarrow & S = K - \left( 1 + \frac{\gamma}{\mu} \right) I. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (3.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \frac{\Lambda}{m} - \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} Q - mQ = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{\beta_1 \Lambda I}{m(1 + \alpha_1 I)} - \left( m + \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \right) Q = 0 \\
\Leftrightarrow & \left( \frac{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I}{m(1 + \alpha_1 I)} \right) Q = \frac{\beta_1 \Lambda I}{m(1 + \alpha_1 I)} \\
\Leftrightarrow & Q = \frac{\beta_1 \Lambda I}{m(1 + \alpha_1 I)} \left( \frac{m(1 + \alpha_1 I)}{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I} \right) \\
\Leftrightarrow & Q = \frac{\beta_1 \Lambda I}{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Jika Persamaan-persamaan (3.16) dan (3.17) disubstitusikan ke Persamaan (3.12), maka

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\beta_2 \left( \frac{\beta_1 \Lambda I}{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I} \right)}{1 + \alpha_p \left( \frac{\beta_1 \Lambda I}{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I} \right)} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_s I} \right) \left( K - \left( 1 + \frac{\gamma}{\mu} \right) I \right) \\
& - \omega I = 0 \\
\Leftrightarrow & \left( \frac{\frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda I}{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I}}{\frac{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_2 \beta_1 \Lambda I}{m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I}} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) \left( K - I - \frac{\gamma}{\mu} I \right) \\
& - \omega I = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left( \frac{\beta_1\beta_2\Lambda I}{m^2(1+\alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_p\beta_1\Lambda I} + \frac{\beta_3 I}{1+\alpha_3 I} \right) \left( K - I - \frac{\gamma}{\mu} I \right) \\
&\quad - \omega I = 0 \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{(1+\alpha_3 I)\beta_1\beta_2\Lambda I + \beta_3 I(m^2(1+\alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)}{(m^2(1+\alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)(1+\alpha_3 I)} \right) \\
&\quad \left( \frac{\mu K - \mu I - \gamma I}{\mu} \right) - \omega I = 0. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.18) dapat ditulis menjadi

$$\frac{A}{B} \left( \frac{C}{D} \right) - \omega I = 0,$$

dengan

$$A = (1 + \alpha_3 I)\beta_1\beta_2\Lambda I + \beta_3 I(m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)$$

$$B = (m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)(1 + \alpha_3 I)$$

$$C = \mu K - \mu I - \gamma I$$

$$D = \mu,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{AC - \omega BDI}{BD} = 0 \\
&\Leftrightarrow AC - \omega BDI = 0 \\
&\Leftrightarrow [(1 + \alpha_3 I)\beta_1\beta_2\Lambda I + \beta_3 I(m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_p\beta_1\Lambda I)] \\
&\quad [\mu K - \mu I - \gamma I] - \omega \mu I [(m^2(1 + \alpha_1 I) + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)(1 + \alpha_3 I)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \mu K [\beta_1\beta_2\Lambda I + \alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \beta_3 I(m^2 + \alpha_1 m^2 I + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)] \\
&\quad - \mu I [\beta_1\beta_2\Lambda I + \alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \beta_3 I(m^2 + \alpha_1 m^2 I + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)] \\
&\quad - \gamma I [\beta_1\beta_2\Lambda I + \alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \beta_3 I(m^2 + \alpha_1 m^2 I + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)] \\
&\quad - \omega \mu I [(m^2 + \alpha_1 m^2 I + m\beta_1 I + \alpha_2\beta_1\Lambda I)(1 + \alpha_3 I)] = 0 \\
&\Leftrightarrow [\mu K\beta_1\beta_2\Lambda I + \mu K\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \mu K\beta_3 m^2 I + \mu K\beta_3\alpha_1 m^2 I^2 + \mu K\beta_3 m\beta_1 I^2 \\
&\quad + \mu K\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda I^2] - [\mu\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \mu\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^3 + \mu\beta_3 m^2 I^2 + \mu\beta_3\alpha_1 m^2 I^3 \\
&\quad + \mu\beta_3 m\beta_1 I^3 + \mu\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda I^3] - [\gamma\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \gamma\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^3 + m^2\gamma\beta_3 I^2 \\
&\quad + \alpha_1 m^2\gamma\beta_3 I^3 + m\beta_1\gamma\beta_3 I^3 + \alpha_2\beta_1\Lambda\gamma\beta_3 I^3] - [m^2\omega\mu I + \alpha_1 m^2\omega\mu I^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m\beta_1\omega\mu I^2 + \alpha_2\beta_1\Lambda\omega\mu I^2 + m^2\alpha_3\omega\mu I^2 + \alpha_1m^2\alpha_3\omega\mu I^3 + m\beta_1\alpha_3\omega\mu I^3 \\
& +\alpha_2\beta_1\Lambda\alpha_3\omega\mu I^3] = 0 \\
\Leftrightarrow & \mu K\beta_1\beta_2\Lambda I + \mu K\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^2 + \mu K\beta_3m^2I + \mu K\beta_3\alpha_1m^2I^2 + \mu K\beta_3m\beta_1I^2 \\
& + \mu K\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda I^2 - \mu\beta_1\beta_2\Lambda I^2 - \mu\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^3 - \mu\beta_3m^2I^2 - \mu\beta_3\alpha_1m^2I^3 \\
& - \mu\beta_3m\beta_1I^3 - \mu\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda I^3 - \gamma\beta_1\beta_2\Lambda I^2 - \gamma\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda I^3 - m^2\gamma\beta_3I^2 \\
& - \alpha_1m^2\gamma\beta_3I^3 - m\beta_1\gamma\beta_3I^3 - \alpha_2\beta_1\Lambda\gamma\beta_3I^3 - m^2\omega\mu I - \alpha_1m^2\omega\mu I^2 \\
& - m\beta_1\omega\mu I^2 - \alpha_2\beta_1\Lambda\omega\mu I^2 - m^2\alpha_3\omega\mu I^2 - \alpha_1m^2\alpha_3\omega\mu I^3 - m\beta_1\alpha_3\omega\mu I^3 \\
& - \alpha_2\beta_1\Lambda\alpha_3\omega\mu I^3 = 0 \\
\Leftrightarrow & -(\mu\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \mu\beta_3\alpha_1m^2 + \mu\beta_3m\beta_1 + \mu\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda + \gamma\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \alpha_1m^2\gamma\beta_3 \\
& + m\beta_1\gamma\beta_3 + \alpha_2\beta_1\Lambda\gamma\beta_3 + \alpha_1m^2\alpha_3\omega\mu + m\beta_1\alpha_3\omega\mu + \alpha_2\beta_1\Lambda\alpha_3\omega\mu) I^3 \\
& + (\mu K\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \mu K\beta_3\alpha_1m^2 + \mu K\beta_3m\beta_1 + \mu K\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda - \mu\beta_1\beta_2\lambda \\
& - \mu\beta_3m^2 - \gamma\beta_1\beta_2\lambda - m^2\gamma\beta_3 - \alpha_1m^2\omega\mu - m\beta_1\omega\mu - \alpha_2\beta_1\Lambda\omega\mu \\
& - m^2\alpha_3\omega\mu) I^2 + (\mu K\beta_1\beta_2\lambda + \mu K\beta_3m^2 - m^2\omega\mu) I = 0 \\
\Leftrightarrow & (\mu\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \mu\beta_3\alpha_1m^2 + \mu\beta_3m\beta_1 + \mu\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda + \gamma\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \alpha_1m^2\gamma\beta_3 \\
& + m\beta_1\gamma\beta_3 + \alpha_2\beta_1\Lambda\gamma\beta_3 + \alpha_1m^2\alpha_3\omega\mu + m\beta_1\alpha_3\omega\mu + \alpha_2\beta_1\Lambda\alpha_3\omega\mu) I^2 \\
& - (\mu K\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \mu K\beta_3\alpha_1m^2 + \mu K\beta_3m\beta_1 + \mu K\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda - \mu\beta_1\beta_2\Lambda \\
& - \mu\beta_3m^2 - \gamma\beta_1\beta_2\Lambda - m^2\gamma\beta_3 - \alpha_1m^2\omega\mu - m\beta_1\omega\mu - \alpha_2\beta_1\Lambda\omega\mu \\
& - m^2\alpha_3\omega\mu) I - (\mu K\beta_1\beta_2\lambda + \mu K\beta_3m^2 - m^2\omega\mu) = 0 \\
\Leftrightarrow & (\mu\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \mu\beta_3\alpha_1m^2 + \mu\beta_3m\beta_1 + \mu\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda + \gamma\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \alpha_1m^2\gamma\beta_3 \\
& + m\beta_1\gamma\beta_3 + \alpha_2\beta_1\Lambda\gamma\beta_3 + \alpha_1m^2\alpha_3\omega\mu + m\beta_1\alpha_3\omega\mu + \alpha_2\beta_1\Lambda\alpha_3\omega\mu) I^2 \\
& + (-\mu K\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda - \mu K\beta_3\alpha_1m^2 - \mu K\beta_3m\beta_1 - \mu K\beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda + \mu\beta_1\beta_2\Lambda \\
& + \mu\beta_3m^2 + \gamma\beta_1\beta_2\Lambda + m^2\gamma\beta_3 + \alpha_1m^2\omega\mu + m\beta_1\omega\mu + \alpha_2\beta_1\Lambda\omega\mu \\
& + m^2\alpha_3\omega\mu) I + (-\mu K\beta_1\beta_2\lambda - \mu K\beta_3m^2 + m^2\omega\mu) = 0 \\
\Leftrightarrow & [(\mu + \gamma)(\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \beta_3\alpha_1m^2 + \beta_3m\beta_1 + \beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda) + \mu\omega(\alpha_1m^2\alpha_3 \\
& + m\beta_1\alpha_3 + \alpha_2\beta_1\lambda\alpha_3)] I^2 + [(\mu + \gamma)(\beta_1\beta_2\Lambda + \beta_3m^2) + \mu\omega(\alpha_1m^2 + m\beta_1 \\
& + \alpha_2\beta_1\Lambda + m^2\alpha_3) - \mu K(\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \beta_3\alpha_1m^2 + \beta_3m\beta_1 + \beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda)] I \\
& + (-\mu K\beta_1\beta_2\lambda - \mu K\beta_3m^2 + m^2\omega\mu) = 0
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$TI^2 + UI + W = 0, \quad (3.19)$$

dengan

$$\begin{aligned} T &= (\mu + \gamma) (\alpha_3 \beta_1 \beta_2 \Lambda + \beta_3 \alpha_1 m^2 + \beta_3 m \beta_1 + \beta_3 \alpha_2 \beta_1 \Lambda) \\ &\quad + \mu \omega (\alpha_1 m^2 \alpha_3 + m \beta_1 \alpha_3 + \alpha_2 \beta_1 \Lambda \alpha_3) > 0 \\ U &= (\mu + \gamma) (\beta_1 \beta_2 \Lambda + \beta_3 m^2) + \mu \omega (\alpha_1 m^2 + m \beta_1 + \alpha_2 \beta_1 \Lambda + m^2 \alpha_3) \\ &\quad - \mu K (\alpha_3 \beta_1 \beta_2 \Lambda + \beta_3 \alpha_1 m^2 + \beta_3 m \beta_1 + \beta_3 \alpha_2 \beta_1 \Lambda) \\ W &= m^2 \omega \mu - \mu K \beta_1 \beta_2 \Lambda - \mu K \beta_3 m^2 \\ &= m^2 \omega \mu \left[ 1 - \frac{\mu K (\beta_1 \beta_2 \Lambda - \beta_3 m^2)}{m^2 \omega \mu} \right] \\ &= m^2 \omega \mu \left[ 1 - \left( \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{m^2 \omega} \right) \right] \\ &= m^2 \omega \mu [1 - R_0]. \end{aligned}$$

Jika  $R_0 > 1$ , maka  $W < 0$  dan Persamaan (3.19) memiliki akar positif unik. Dengan demikian, pada Sistem (3.7) terdapat sebuah titik ekuilibrium endemik unik  $E_1 = (S^*, I^*, Q^*)$  pada interior  $\Omega$ , dengan

$$\begin{aligned} S^* &= K - \left( 1 + \frac{\gamma}{\mu} \right) I^*, \\ I^* &= \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4TW}}{2T}, \\ Q^* &= \frac{\beta_1 \Lambda I^*}{m^2 (1 + \alpha_1 I^*) + m \beta_1 I^*}. \end{aligned}$$

■

### 3.5. Analisis Perilaku Model

Model epidemi tanaman pada Sistem (3.7) merupakan sistem nonlinier. Analisis perilaku model dilakukan dengan terlebih dahulu membentuk matriks Jacobian hasil linierisasi Sistem (3.7) di titik ekuilibrium. Matriks Jacobian hasil linierisasi

model epidemi tanaman di sekitar titik ekuilibrium  $E = (S^*, I^*, Q^*)$  adalah

$$J_{(E)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left( \frac{dS}{dt} \right)}{\partial S} & \frac{\partial \left( \frac{dS}{dt} \right)}{\partial I} & \frac{\partial \left( \frac{dS}{dt} \right)}{\partial Q} \\ \frac{\partial \left( \frac{dI}{dt} \right)}{\partial S} & \frac{\partial \left( \frac{dI}{dt} \right)}{\partial I} & \frac{\partial \left( \frac{dI}{dt} \right)}{\partial Q} \\ \frac{\partial \left( \frac{dQ}{dt} \right)}{\partial S} & \frac{\partial \left( \frac{dQ}{dt} \right)}{\partial I} & \frac{\partial \left( \frac{dQ}{dt} \right)}{\partial Q} \end{bmatrix}_{(S,I,Q)=(S^*,I^*,Q^*)}.$$

Elemen-elemen pada matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $E$  diperoleh dengan cara menurunkan persamaan-persamaan pada Sistem (3.7) sebagai berikut.

1. Jika  $\frac{dS}{dt} = \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{dS}{dt} \right)}{\partial S} &= \frac{\partial \left( \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI \right)}{\partial S} \\ &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right), \\ \frac{\partial \left( \frac{dS}{dt} \right)}{\partial I} &= \frac{\partial \left( \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI \right)}{\partial I} \\ &= d - \frac{\beta_3 S}{(1 + \alpha_3 I)^2}, \\ \frac{\partial \left( \frac{dS}{dt} \right)}{\partial Q} &= \frac{\partial \left( \mu(K - S) - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S + dI \right)}{\partial Q} \\ &= -\frac{\beta_2 S}{(1 + \alpha_2 Q)^2}. \end{aligned}$$

2. Jika  $\frac{dI}{dt} = \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I$ , maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{dI}{dt} \right)}{\partial S} &= \frac{\partial \left( \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I \right)}{\partial S} \\ &= \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left( \frac{dI}{dt} \right)}{\partial I} &= \frac{\partial \left( \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I \right)}{\partial I} \\
&= \frac{\beta_3 S}{(1 + \alpha_3 I)^2} - \omega, \\
\frac{\partial \left( \frac{dI}{dt} \right)}{\partial Q} &= \frac{\partial \left( \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I \right)}{\partial Q} \\
&= \frac{\beta_2 S}{(1 + \alpha_2 Q)^2}.
\end{aligned}$$

3. Jika  $\frac{dQ}{dt} = \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ$ , maka

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left( \frac{dQ}{dt} \right)}{\partial S} &= \frac{\partial \left( \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ \right)}{\partial S} \\
&= 0, \\
\frac{\partial \left( \frac{dQ}{dt} \right)}{\partial I} &= \frac{\partial \left( \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ \right)}{\partial I} \\
&= \frac{\beta_1 \Lambda}{m(1 + \alpha_1 I)^2} - \frac{\beta_1 Q}{(1 + \alpha_1 I)^2}, \\
\frac{\partial \left( \frac{dQ}{dt} \right)}{\partial Q} &= \frac{\partial \left( \frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ \right)}{\partial Q} \\
&= -\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} - m.
\end{aligned}$$

Jadi, diperoleh matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $E = (S^*, I^*, Q^*)$  yaitu

$$J_{(E)} = \begin{bmatrix} G_1 & d - \frac{\beta_3 S}{(1 + \alpha_3 I)^2} & -\frac{\beta_2 S}{(1 + \alpha_2 Q)^2} \\ G_2 & \frac{\beta_3 S}{(1 + \alpha_3 I)^2} - \omega & \frac{\beta_2 S}{(1 + \alpha_2 Q)^2} \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{m(1 + \alpha_1 I)^2} - \frac{\beta_1 Q}{(1 + \alpha_1 I)^2} & -\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} - m \end{bmatrix}_{(S, I, Q) = (S^*, I^*, Q^*)} \quad (3.20)$$

dengan

$$\begin{aligned}
G_1 &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right), \\
G_2 &= \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I}.
\end{aligned}$$

### 3.5.1. Analisis Perilaku Model di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada subbab ini akan dilakukan analisis terhadap kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit model epidemi pada tanaman. Hasil Linierisasi Sistem (3.7) di sekitar titik ekuilibrium  $E_0 = (K, 0, 0)$  adalah

$$\begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix} = J_{(E_0)} \begin{pmatrix} S \\ I \\ Q \end{pmatrix}.$$

Jika titik ekuilibrium  $E_0 = (K, 0, 0)$  disubstitusikan ke Persamaan (3.20), maka diperoleh matriks  $J_{(E_0)}$  yaitu matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $E_0$  sebagai berikut.

$$J_{(E_0)} = \begin{bmatrix} -\mu - \left( \frac{0}{1+0} + \frac{0}{1+0} \right) & d - \frac{\beta_3 K}{(1+0)^2} & -\frac{\beta_2 K}{(1+0)^2} \\ \frac{0}{1+0} + \frac{0}{1+0} & \frac{\beta_3 K}{(1+0)^2} - \omega & \frac{\beta_2 K}{(1+0)^2} \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{m(1+0)^2} - \frac{0}{(1+0)^2} & -\frac{0}{1+0} - m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow J_{(K,0,0)} = \begin{bmatrix} -\mu & d - \beta_3 K & -\beta_2 K \\ 0 & \beta_3 K - \omega & \beta_2 K \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{m} & -m \end{bmatrix}.$$

**Teorema 3.5.1** *Dimisalkan  $E_0 = (S^*, I^*, Q^*) = (K, 0, 0)$ . Jika  $R_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium  $E_0$  stabil asimtotik lokal.*

**Bukti.** Persamaan karakteristik untuk  $J_{(K,0,0)}$  adalah

$$\begin{aligned} & |J_{(K,0,0)} - \lambda I| = 0 \\ \Leftrightarrow & \left| \begin{bmatrix} -\mu & d - \beta_3 K & -\beta_2 K \\ 0 & \beta_3 K - \omega & \beta_2 K \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{m} & -m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & d - \beta_3 K & -\beta_2 K \\ 0 & \beta_3 K - \omega - \lambda & \beta_2 K \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{m} & -m - \lambda \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (-\mu - \lambda)(\beta_3 K - \omega - \lambda)(-m - \lambda) - \frac{\beta_1 \Lambda \beta_2 K}{m}(-\mu - \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu)(\lambda + m)(\beta_3 K - \omega - \lambda) + (\lambda + \mu) \frac{\beta_1 \Lambda \beta_2 K}{m} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu) \left[ (\lambda + m)(\beta_3 K - \omega - \lambda) + \frac{\beta_1 \Lambda \beta_2 K}{m} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu) \left[ (\lambda + m)(\lambda + \omega - \beta_3 K) - \frac{\beta_1 \Lambda \beta_2 K}{m} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu) \left[ \lambda^2 + m\lambda + \omega\lambda + m\omega - \beta_3 K\lambda - \beta_3 K m - \frac{\Lambda}{m} \beta_1 \beta_2 K \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu) L = 0, \tag{3.21}
\end{aligned}$$

dengan  $L = \lambda^2 + (m + \omega - \beta_3 K)\lambda + m\omega - m\beta_3 K - \frac{\Lambda}{m}\beta_1\beta_2 K$ . Berdasarkan Persamaan karakteristik (3.21) diperoleh  $\lambda_1 = -\mu$ . Selanjutnya, untuk menentukan  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  diperhatikan persamaan

$$\lambda^2 + (m + \omega - \beta_3 K)\lambda + \left( m\omega - m\beta_3 K - \frac{\Lambda}{m}\beta_1\beta_2 K \right) = 0. \tag{3.22}$$

Penentuan tanda untuk dua nilai eigen dari Persamaan karakteristik (3.22) dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Persamaan (2.35), diperoleh  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = m + \omega - \beta_3 K$ , dan  $a_2 = m\omega - m\beta_3 K - \frac{\Lambda}{m}\beta_1\beta_2 K$ , sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_0} &= m + \omega - \beta_3 K, \\
\frac{a_2}{a_0} &= m\omega - m\beta_3 K - \frac{\Lambda}{m}\beta_1\beta_2 K.
\end{aligned}$$

Syarat pertama kriteria Routh-Hurwitz adalah  $\frac{a_1}{a_0} > 0$  dan  $\frac{a_2}{a_0} > 0$ . Diperhatikan bahwa jika  $R_0 < 1$ , maka

$$\begin{aligned}
&R_0 < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{m^2 \beta_3 K + \beta_1 \beta_2 \Lambda K}{m^2 \omega} < \frac{m^2 \omega}{m^2 \omega} \\
&\Leftrightarrow m^2 \beta_3 K + \beta_1 \beta_2 \Lambda K < m^2 \omega \\
&\Leftrightarrow m^2 \omega - m^2 \beta_3 K > \beta_1 \beta_2 \Lambda K \\
&\Leftrightarrow m^2 (\omega - \beta_3 K) > \beta_1 \beta_2 \Lambda K \\
&\Leftrightarrow \omega - \beta_3 K > \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{m^2}.
\end{aligned}$$

Diketahui  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ,  $\Lambda > 0$ ,  $m > 0$ , dan  $K \geq 0$ , sehingga  $\omega - \beta_3 K > 0$ , akibatnya  $\frac{a_1}{a_0} = m + \omega - \beta_3 K > 0$ . Selanjutnya, agar  $\frac{a_2}{a_0} > 0$  juga haruslah  $R_0 < 1$ , yaitu

$$\begin{aligned}
R_0 &< 1 \\
\Leftrightarrow \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} &< 1 \\
\Leftrightarrow \frac{m^2 \beta_3 K + \beta_1 \beta_2 \Lambda K}{m^2 \omega} &< \frac{m^2 \omega}{m^2 \omega} \\
\Leftrightarrow m^2 \beta_3 K + \beta_1 \beta_2 \Lambda K &< m^2 \omega \\
\Leftrightarrow m \beta_3 K + \frac{\Lambda}{m} \beta_1 \beta_2 K &< m \omega \\
\Leftrightarrow m \beta_3 K + \frac{\Lambda}{m} \beta_1 \beta_2 K - m \omega &< 0 \\
\Leftrightarrow m \omega - m \beta_3 K - \frac{\Lambda}{m} \beta_1 \beta_2 K &> 0 \\
\Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} &> 0.
\end{aligned}$$

Syarat kedua kriteria Routh-Hurwitz adalah determinan matriks Hurwitz Persamaan (3.22) bernilai positif. Matriks Hurwitz untuk Persamaan (3.22) adalah

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan matriks  $H$  diperoleh determinan matriks Hurwitz sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |a_1| = m + \omega - \beta_3 K, \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} m + \omega - \beta_3 K & 1 \\ 0 & m \omega - m \beta_3 K - \frac{\Lambda}{m} \beta_1 \beta_2 K \end{vmatrix} \\
&= (m + \omega - \beta_3 K) \left( m \omega - m \beta_3 K - \frac{\Lambda}{m} \beta_1 \beta_2 K \right).
\end{aligned}$$

Determinan matriks Hurwitz  $\Delta_1$  dan  $\Delta_2$  akan bernilai positif jika  $R_0 < 1$ . Jadi, berdasarkan Teorema 2.8.4 diperoleh bahwa semua bagian real nilai eigen dari

Polinomial (3.22) bernilai negatif jika  $R_0 < 1$ . Dengan kata lain,  $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , dan  $\text{Re}(\lambda_3) \neq 0$  jika  $R_0 < 1$ , sehingga berdasarkan Definisi 2.6.1, titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  adalah titik ekuilibrium hiperbolik jika  $R_0 < 1$ .

Kestabilan titik ekuilibrium  $E_0$  bergantung pada tanda dari ketiga nilai eigen Persamaan karakteristik (3.21). Berdasarkan Teorema 2.4.2 tentang kestabilan titik ekuilibrium sistem linier diperoleh kestabilan titik ekuilibrium  $E_0$  hasil linierisasi Sistem (3.7) adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ . Karena titik ekuilibrium ( $E_0$ ) hasil linierisasi Sistem (3.7) stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ , maka berdasarkan Teorema 2.6.2 tentang kestabilan titik ekuilibrium nonlinier, titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  juga akan stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ . Hal ini berarti, jika  $R_0 < 1$  maka penyakit tidak akan menyebar, dengan kata lain untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. ■

### 3.5.2. Analisis Perilaku Model di Titik Ekuilibrium Endemik

Pada subbab ini akan dilakukan analisis terhadap kestabilan titik ekuilibrium endemik model epidemi pada tanaman. Hasil linierisasi Sistem (3.7) di sekitar titik ekuilibrium  $E_1 = (S^*, I^*, Q^*)$  dengan

$$\begin{aligned} S^* &= K - \left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) I^*, \\ I^* &= \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4TW}}{2T}, \\ Q^* &= \frac{\beta_1 \Lambda I^*}{m^2 (1 + \alpha_1 I^*) + m\beta_1 I^*} \end{aligned}$$

adalah

$$\begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} \end{pmatrix} = J_{(E_1)} \begin{pmatrix} S \\ I \\ Q \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Jika titik ekuilibrium  $E_1 = (S^*, I^*, Q^*)$  disubstitusikan ke Persamaan (3.20), maka diperoleh matriks  $J_{E_1}$  yaitu matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium  $E_1$  sebagai

berikut.

$$J_{(E_1)} = \begin{pmatrix} M_1 & d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} & -\frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\ M_2 & \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega & \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\ 0 & \left(\frac{\Lambda}{m} - Q^*\right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} & -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} M_1 &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right), \\ M_2 &= \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (2.41) diperoleh *second additive compound matrix* untuk matriks  $J_{(E_1)}$  yaitu

$$J_{(E_1)}^{[2]} = \begin{pmatrix} D_{11} & \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} & \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\ \left(\frac{\Lambda}{m} - Q^*\right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} & D_{22} & d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \\ 0 & \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} & D_{33} \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} D_{11} &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega, \\ D_{22} &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right), \\ D_{33} &= \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega - \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m. \end{aligned}$$

**Teorema 3.5.2** Dimisalkan  $E_1 = (S^*, I^*, Q^*)$ , dengan

$$\begin{aligned} S^* &= K - \left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) I^*, \\ I^* &= \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4TW}}{2T}, \\ Q^* &= \frac{\beta_1 \Lambda I^*}{m^2 (1 + \alpha_1 I^*) + m \beta_1 I^*}. \end{aligned}$$

Jika  $R_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium endemik  $E_1$  stabil asimtotik lokal.

**Bukti.** Pembuktian Teorema 3.5.2 akan menggunakan Lemma 2.9.2 sehingga terlebih dahulu dicari nilai trace matriks  $J_{(E_1)}$ , determinan matriks  $J_{(E_1)}$ , dan determinan matriks  $J_{(E_1)}^{[2]}$  sebagai berikut.

1. **Nilai trace matriks  $J_{(E_1)}$**

Nilai trace matriks  $J_{(E_1)}$  adalah

$$\begin{aligned} \text{tr} (J_{(E_1)}) &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \\ &\quad - \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m. \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) S^* - \omega I^* = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{\beta_2 Q^* S^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^* S^*}{1 + \alpha_3 I^*} = \omega I^* \\ \Leftrightarrow &\frac{\beta_2 Q^* S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*) I^*} + \frac{\beta_3 I^* S^*}{(1 + \alpha_3 I^*) I^*} = \omega \\ \Leftrightarrow &\frac{\beta_2 Q^* S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*) I^*} + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)} = \omega \\ \Leftrightarrow &\frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)} = \omega - \frac{\beta_2 Q^* S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*) I^*}, \end{aligned}$$

sehingga jelas bahwa

$$\frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)} < \omega.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} < \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)} < \omega,$$

akibatnya

$$\frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega < 0.$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{tr} (J_{(E_1)}) &= -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \\ &\quad - \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \\ &< 0. \end{aligned}$$

## 2. Nilai determinan matriks $J_{(E_1)}$

Nilai determinan matriks  $J_{(E_1)}$  adalah

$$\det(J_{(E_1)}) = \begin{vmatrix} M_1 & d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} & -\frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\ M_2 & \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega & \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\ 0 & \left(\frac{\Lambda}{m} - Q^*\right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} & -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \end{vmatrix},$$

dengan

$$M_1 = -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right),$$

$$M_2 = \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \det(J_{(E_1)}) &= \left[ M_1 \times \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \right] \\ &\quad - \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \times M_2 \right] \\ &\quad - \left[ M_1 \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \times \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \\ &\quad - \left[ \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \times M_2 \times \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \right] \\ &= \left[ -\left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \times \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \right] \\ &\quad \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \\ &\quad \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \times \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \\ &\quad - \left[ -\left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right] \\ &\quad \times \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} - \left[ \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \times \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*}\right) \times \left[ \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \right. \\
&\quad \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \\
&\quad \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left. \right] - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \\
&\quad \times \left[ \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right] \\
&= -\mu \times \left[ \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \right] - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \right] - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \\
&\quad \times \left[ \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right] \\
&= -\mu \times \left[ \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \right] - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) + \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) + \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right]
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\det(J_{(E_1)}) = -\mu f - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) (f + g)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 f &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \\
 &\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right), \\
 g &= \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) + \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \\
 &\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3.13) diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\frac{\beta_1 I}{1 + \alpha_1 I} \left( \frac{\Lambda}{m} - Q \right) - mQ = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{\Lambda}{m} - Q = mQ \left( \frac{1 + \alpha_1 I}{\beta_1 I} \right). \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Jika Persamaan (3.24) disubstitusikan ke persamaan  $f$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 f &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \\
 &\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - mQ^* \left( \frac{1 + \alpha_1 I^*}{\beta_1 I^*} \right) \\
 &\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - m \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*)} \\
 &\quad \left( \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I^* (1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} \right) - m \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \\
 &\quad - m \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*)} \left( \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I^* (1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
 &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} \right) + m \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*)} \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I^* (1 + \alpha_2 Q^*)^2}.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (3.12) diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\beta_2 Q}{1 + \alpha_2 Q} + \frac{\beta_3 I}{1 + \alpha_3 I} \right) S - \omega I = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\beta_2 S Q}{1 + \alpha_2 Q} = \left( \omega - \frac{\beta_3 S}{1 + \alpha_3 I} \right) I \\
& \Leftrightarrow \frac{\beta_2 S Q}{I (1 + \alpha_2 Q)} = \omega - \frac{\beta_3 S}{1 + \alpha_3 I}, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
& \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*)} \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I^* (1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\
& = \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*) (1 + \alpha_2 Q^*)} \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I^* (1 + \alpha_2 Q^*)} \\
& = \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*) (1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right).
\end{aligned}$$

Karena  $\omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} > 0$  dan  $\omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} > 0$ , maka

$$\omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} > \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*}.$$

Selanjutnya, karena  $\frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*) (1 + \alpha_2 Q^*)} < 1$ , maka

$$\omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} > \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*) (1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right)$$

atau

$$\omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*) (1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) > 0.$$

Selain itu, karena  $\left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) < 0$  dan  $\left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} \right) < 0$ , maka

$$\left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} \right) > 0.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
f & = \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} \right) + m \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(1 + \alpha_1 I^*)} \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I^* (1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
& > 0.
\end{aligned}$$

Karena  $\mu > 0$  dan  $f > 0$ , maka  $-\mu f < 0$ . Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f + g &= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \\
&\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) + \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \\
&\quad \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) + \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \\
&\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \times \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
&= \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \\
&\quad + \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \times \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \\
&= \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right) \\
&= \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) (d - \omega) \\
&= \left( -\frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) (d - (d + \mu + \gamma)) \\
&= - \left( \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) (-(\mu + \gamma)) \\
&= \left( \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) (\mu + \gamma) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Karena  $\left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) > 0$  dan  $f + g > 0$ , maka

$$\left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) (f + g) > 0,$$

akibatnya

$$- \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) (f + g) < 0.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\det (J_{(E_1)}) &= -\mu f - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) (f + g) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

### 3. Nilai determinan matriks $J_{(E_1)}^{[2]}$

Nilai determinan matriks  $J_{(E_1)}^{[2]}$  adalah

$$\begin{aligned}
& \det \left( J_{(E_1)}^{[2]} \right) \\
&= \begin{vmatrix} D_{11} & \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} & \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} & D_{22} & d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \\ 0 & \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} & D_{33} \end{vmatrix} \\
&= D_{11} D_{22} D_{33} + \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \left[ \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right] - D_{11} \left[ d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \left[ \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right] \\
&\quad - D_{33} \left[ \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right] \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \\
&= \left[ -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right] \left[ -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] \left[ \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega - \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right] \\
&\quad + \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \left[ \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right] \\
&\quad - \left[ -\mu - \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) + \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega \right] \\
&\quad \left[ d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \left[ \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right] - \left[ \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega - \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right] \left[ \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right] \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \\
&= - \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \times \left[ \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] - \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} - \omega - \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} - m \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \\
= & - \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
& \times \left[ \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right. \\
& \quad \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \\
& \quad \left. \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] + \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \\
& \times \left[ \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \\
= & \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \times \left[ \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) + \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \\
& - \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
& \times \left[ \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right. \\
& \quad \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \\
& \quad \left. \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis

$$\det \left( J_{(E_1)}^{[2]} \right) = uw - jk,$$

dengan

$$\begin{aligned}
u &= \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2}, \\
w &= \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) + \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\
& \quad \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j &= \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2}, \\
k &= \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right).
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
jk &= \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \\
&= \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] - \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \left[ \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \\
&= \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] \\
&\quad + \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] \\
&\quad - \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \mu + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] + \left[ \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right] \\
&\quad \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] \\
&\quad + \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right] \\
&\quad - \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right]
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
uw &= \left[ \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \right] \left[ \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) + \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \\
&= \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) + \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \\
&\quad \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right)
\end{aligned}$$

sehingga

$$jk - uw = v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5 - v_6,$$

dengan

$$\begin{aligned}
v_1 &= \left[ \mu + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right], \\
v_2 &= \left[ \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right] \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right], \\
v_4 &= \left[ \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right] \\
&\quad \left[ \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right], \\
v_5 &= \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right), \\
v_6 &= \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right).
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa dengan menyubstitusikan Persamaan (3.24) diperoleh

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} &= m Q^* \left( \frac{1 + \alpha_1 I^*}{\beta_1 I^*} \right) \\
&\quad \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \\
&= \frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} \\
&\quad \left( \frac{\beta_2 S^* Q^*}{I(1 + \alpha_2 Q^*)} \right)
\end{aligned}$$

sehingga dengan menyubstitusikan Persamaan (3.25) diperoleh

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} &= \frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} \\
&\quad \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
v_1 - v_5 &= \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \\
&\quad \left[ \left( \mu + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right]
\end{aligned}$$

sehingga dengan menyubstitusikan Persamaan (3.26) diperoleh

$$v_1 - v_5 = \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left[ \left( \mu + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right].$$

Karena  $(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*) > 1$ , maka  $\frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} < m$ , akibatnya

$$\frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} < \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m.$$

Selanjutnya, mengingat  $\omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} < \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2}$ , maka

$$\omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} < \mu + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2},$$

sehingga

$$\left[ \left( \mu + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] > 0.$$

Di lain pihak,  $\omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m > 0$ . Dengan demikian,  $v_1 - v_5 > 0$ .

Selanjutnya,

$$v_2 - v_6 = \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( \frac{\Lambda}{m} - Q^* \right) \left( \frac{\beta_1}{(1 + \alpha_1 I^*)^2} \frac{\beta_2 S^*}{(1 + \alpha_2 Q^*)^2} \right) \right]$$

sehingga dengan menyubstitusikan Persamaan (3.26) diperoleh

$$v_2 - v_6 = \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right].$$

Karena  $(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*) > 1$ , maka  $\frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} < m$ , akibatnya

$$\frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} < \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m.$$

Selanjutnya, mengingat  $\omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} < \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2}$ , maka

$$\omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} < \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m,$$

sehingga

$$\left[ \left( \mu + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \frac{m}{(1 + \alpha_1 I^*)(1 + \alpha_2 Q^*)} \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] > 0.$$

Di lain pihak,  $\left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) > 0$ . Dengan demikian,  $v_2 - v_6 > 0$ .

Selanjutnya,

$$v_3 - v_4 = \left[ \left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) \right] \left[ \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \right].$$

Karena  $d < \omega$ , maka  $d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} < \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2}$ , akibatnya

$$\left[ \left( \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} + \frac{\beta_1 I^*}{1 + \alpha_1 I^*} + m \right) - \left( d - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \right] > 0.$$

Di lain pihak,

$$\left( \mu + \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} + \omega - \frac{\beta_3 S^*}{(1 + \alpha_3 I^*)^2} \right) \left( \frac{\beta_2 Q^*}{1 + \alpha_2 Q^*} + \frac{\beta_3 I^*}{1 + \alpha_3 I^*} \right) > 0.$$

Dengan demikian,  $v_3 - v_4 > 0$ . Jadi, diperoleh  $v_1 - v_5 > 0$ ,  $v_2 - v_6 > 0$ , dan  $v_3 - v_4 > 0$ , sehingga  $jk - uw > 0$ . Dengan kata lain,  $jk > uw$ , akibatnya  $\det \left( J_{(E_1)}^{[2]} \right) = uw - jk < 0$ .

Jadi diperoleh  $tr(J_{(E_1)}) < 0$ ,  $\det(J_{(E_1)}) < 0$ , dan  $\det \left( J_{(E_1)}^{[2]} \right) < 0$ . Di lain pihak, Sistem (3.7) memiliki sebuah titik ekuilibrium endemik unik  $E_1$  jika  $R_0 > 1$ . Jadi, berdasarkan Lemma 2.9.2 diperoleh bahwa semua nilai eigen dari matriks  $J_{(E_1)}$  mempunyai bagian real yang negatif jika  $R_0 > 1$ . Dengan kata lain,  $\text{Re}(\lambda_1) \neq 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , dan  $\text{Re}(\lambda_3) \neq 0$  jika  $R_0 > 1$ , sehingga berdasarkan Definisi 2.6.1, titik ekuilibrium endemik  $E_1$  adalah titik ekuilibrium hiperbolik jika  $R_0 > 1$ .

Berdasarkan Teorema 2.4.2 tentang kestabilan titik ekuilibrium sistem linier diperoleh kestabilan titik ekuilibrium  $E_1$  hasil linierisasi Sistem (3.7) adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 < 1$ . Karena titik ekuilibrium  $E_1$  hasil linierisasi Sistem (3.7) stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 < 1$ , maka berdasarkan Teorema 2.6.2 tentang kestabilan titik ekuilibrium nonlinier, titik ekuilibrium endemik  $E_1$  juga akan stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 < 1$ . Hal ini berarti, jika  $R_0 > 1$  maka penyakit akan menyebar, dengan kata lain akan terjadi epidemi pada populasi. ■

## BAB IV

### SIMULASI MODEL

Simulasi model dilakukan menggunakan program Maple dengan mengambil contoh penyakit CVPD (*Citrus Vein Phloem Degeneration*) pada tanaman jeruk. Jeruk merupakan salah satu komoditas buah-buahan penting di Indonesia. Menurut Bank Indonesia (2008), tanaman jeruk baru menghasilkan buah setelah umur 3-4 tahun dan puncak produksi pada umur 8-9 tahun. Umur produktif tanaman jeruk bila dipelihara dengan baik dapat mencapai umur 20 tahun. Umur jeruk di lahan dataran rendah diperkirakan sampai umur 20 tahun dan dataran tinggi sampai umur 15 tahun.

Usaha untuk meningkatkan produksi jeruk masih mengalami hambatan, salah satunya akibat adanya penyakit CVPD Saputra, dkk, 2012. Menurut BPTP Sulawesi Selatan (2002), penyakit CVPD disebabkan oleh bakteri *Liberobacter asiaticum* yang hidup dan hanya berkembang di jaringan phloem, akibatnya sel-sel phloem mengalami degenerasi sehingga menghambat tanaman menyerap nutrisi. Penyebaran penyakit ini ditularkan oleh serangga *Diaphorina citri* (kutu loncat) dan bibit jeruk yang terinfeksi CVPD. Vektor *D. citri* baru dapat menularkan CVPD setelah menghisap tanaman sakit selama 48 jam dan penularannya terjadi setelah 360 jam vektor selesai menghisap tanaman sehat. Hasil penularan semakin tinggi apabila vektor telah menghisap tanaman sakit selama 72 jam.

*D. citri* menyerang tangkai, kuncup bunga dan daun, tunas serta daun-daun muda. Bagian tanaman yang terserang parah biasanya mengering secara perlahan-lahan kemudian mati. Serangan ringan mengakibatkan tunas-tunas muda mengering dan pertumbuhannya terhambat. Vektor ini juga menghasilkan sekresi berwarna putih transparan berbentuk spiral, biasanya diletakkan berserak diatas daun atau tunas. *D. citri* mempunyai tiga stadium hidup, yaitu telur, nimfa, dan dewasa.

Telur diletakkan secara tunggal atau berkelompok di kuncup permukaan daun-daun muda atau ditancapkan pada tangkai-tangkai daun. Setelah 2-3 hari, telur menetas menjadi nimfa.

Nimfa yang baru menetas hidup berkelompok di tunas-tunas dan kuncup untuk menghisap cairan tanaman. Setelah berumur 2-3 hari, nimfa menyebar dan menyerang daun-daun muda. Nimfa lebih merusak tanaman daripada kutu dewasanya. Stadium nimfa berlangsung selama 17 hari. Pada kondisi panas, siklus hidup dari telur sampai dewasa berlangsung antara 16-18 hari, sedangkan pada kondisi dingin berlangsung selama 45 hari.

Stadium dewasa ditandai oleh adanya sayap sehingga mudah meloncat apabila terkena sentuhan. *D. citri* dewasa hinggap pada daun tua dan menghisap cairan selnya. Stadium dewasa dapat bertahan hidup selama 80-90 hari.

Penyakit CVPD dapat ditemukan pada semua jenis jeruk yang terdapat di Indonesia. Produksi tanaman yang terserang penyakit ini rendah. Tanaman ini tidak menghasilkan buah. Tanaman sakit tersebut merupakan sumber inokulum bagi tanaman disekitarnya sehingga harus dimusnahkan. Inokulum adalah patogen atau bagian patogen yang dapat menyebabkan infeksi. Tanaman jeruk yang terkena CVPD dengan tingkat serangan ringan, masa produktivitasnya dapat diperpanjang dengan infusan oksitetrasiklin HCl konsentrasi 200 ppm.

#### 4.1. Nilai-nilai Parameter

Nilai-nilai parameter dalam simulasi ini ditentukan berdasarkan data sekunder yaitu data serangan CVPD pada tanaman jeruk yang bersumber dari Dinas Pertanian Propinsi Bali dan BPTP Sulawesi Selatan (2002). Nilai-nilai parameter lainnya dipilih berdasarkan jurnal Shi, dkk (2014).

Menurut data Dinas Pertanian Propinsi Bali, hampir 48.485 pohon jeruk terindikasi terkena serangan CVPD dan 3.144 pohon telah berhasil dikendalikan per periodenya. Berdasarkan data tersebut, diperoleh nilai parameter tingkat kesembuhan ( $\gamma$ ) yaitu  $\gamma = \left( \frac{3.144}{48.485} \right)$  per tahun = 0,065 per tahun.

Selanjutnya, menurut BPTP Sulawesi Selatan (2002), vektor *D. citri* mampu menghasilkan 9-10 generasi dalam 1 tahun, sehingga diperoleh nilai parameter  $\Lambda = 10$  ekor per tahun. Berdasarkan pengamatan Wijaya, dkk (2010), *D. citri* selalu dijumpai pada setiap pengamatan dengan kisaran populasi 0,12 – 9,9 ekor per pohon, sehingga dalam simulasi ini dipilih populasi awal *D. citri* yang terinfeksi dan menularkan sebanyak 10 ekor. Nilai-nilai parameter lainnya berdasarkan jurnal Shi, dkk (2014) adalah  $\beta_1 = 0,01$ ,  $\beta_2 = 0,02$ ,  $\beta_3 = 0,01$ ,  $\alpha_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,2$ ,  $\alpha_3 = 0,2$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $m = 0,3$ , dan  $d = 0,1$ . Dengan demikian, diperoleh tabel nilai-nilai parameter sebagai berikut.

**Tabel 4.1 Nilai-nilai Parameter**

<b>Simbol</b>	<b>Definisi</b>	<b>Nilai</b>	<b>Satuan</b>
$\beta_1$	rasio infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan <i>D. citri</i> rentan	0,01	per pohon per tahun
$\beta_2$	tingkat gigitan <i>D. citri</i> terinfeksi dan menularkan terhadap jeruk rentan	0,02	per ekor per tahun
$\beta_3$	kejadian infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan jeruk rentan	0,01	per pohon per tahun
$\alpha_1$	level kekuatan penyerapan infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan <i>D. citri</i> rentan	0,1	per pohon
$\alpha_2$	level kekuatan penyerapan infeksi <i>D. citri</i> terinfeksi dan menularkan terhadap jeruk rentan	0,2	per pohon
$\alpha_3$	level kekuatan penyerapan infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan jeruk rentan	0,2	per pohon
$\gamma$	tingkat perubahan jeruk terinfeksi dan menularkan menjadi jeruk sembuh (tingkat kesembuhan)	0,065	per tahun
$\mu$	tingkat kematian alami jeruk	0,1	per tahun
$\Lambda$	kelahiran atau imigrasi <i>D. citri</i>	10	ekor per tahun
$m$	tingkat kematian alami <i>D. citri</i>	0,3	per tahun
$d$	tingkat kematian jeruk karena penyakit	0,1	per tahun

dengan nilai awalnya adalah

$$S(0) = 700, I(0) = 200, Q(0) = 10,$$

dan total jumlah pohon jeruk  $K = 1.000$ .

#### 4.2. Perhitungan Numerik dan Simulasi

Berdasarkan Tabel 4.1 diperoleh nilai angka rasio reproduksi dasar

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} \\
 &= \frac{(0,01)(1.000)}{0,1 + 0,1 + 0,065} + \frac{(0,01)(0,02)(10)(1.000)}{(0,1 + 0,1 + 0,065)(0,3^2)} \\
 &= 37,74 + 83,86 \\
 &= 121,6 \\
 &> 1.
 \end{aligned}$$

Karena  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan menyebar, dengan kata lain akan terjadi epidemi. Titik ekuilibrium endemiknya diperoleh berdasarkan perhitungan berikut.

1. Jumlah jeruk rentan  $S^*$

Jumlah jeruk rentan  $S^*$  adalah

$$\begin{aligned}
 S^* &= K - \left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) I^* \\
 &= 1.000 - \left(1 + \frac{0,065}{0,1}\right) I^* \\
 &= 1.000 - 1,65I^*.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

2. Jumlah jeruk terinfeksi dan menularkan  $I^*$

Jumlah jeruk terinfeksi dan menularkan  $I^*$  diperoleh berdasarkan Persamaan (3.19), yaitu

$$TI^2 + UI + W = 0$$

dengan

$$\begin{aligned}
 T &= (\mu + \gamma) (\alpha_3 \beta_1 \beta_2 \Lambda + \beta_3 \alpha_1 m^2 + \beta_3 m \beta_1 + \beta_3 \alpha_2 \beta_1 \Lambda) \\
 &\quad + \mu \omega (\alpha_1 m^2 \alpha_3 + m \beta_1 \alpha_3 + \alpha_2 \beta_1 \Lambda \alpha_3) \\
 &= (0,1 + 0,065) [(0,2)(0,01)(0,02)(10) + (0,01)(0,1)(0,3^2) \\
 &\quad + (0,01)(0,3)(0,01) + (0,01)(0,2)(0,01)(10)] + [(0,1)(0,265)] \\
 &\quad [(0,1)(0,3^2)(0,2) + (0,3)(0,01)(0,2) + (0,2)(0,01)(10)(0,2)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,165(0,0004 + 0,00009 + 0,00003 + 0,0002) \\
&\quad + 0,0265(0,0018 + 0,0006 + 0,004) \\
&= 0,0001188 + 0,0001696 \\
&= 0,0002884, \\
U &= (\mu + \gamma) (\beta_1\beta_2\Lambda + \beta_3m^2) + \mu\omega (\alpha_1m^2 + m\beta_1 + \alpha_2\beta_1\Lambda + m^2\alpha_3) \\
&\quad - \mu K (\alpha_3\beta_1\beta_2\Lambda + \beta_3\alpha_1m^2 + \beta_3m\beta_1 + \beta_3\alpha_2\beta_1\Lambda) \\
&= (0,1 + 0,065)[(0,01)(0,02)(10) + (0,01)(0,3^2)] \\
&\quad + (0,1)(0,1 + 0,1 + 0,065) [(0,1)(0,3^2) + (0,3)(0,01) \\
&\quad + (0,2)(0,01)(10) + (0,3^2)(0,2)] - [(0,1)(1.000)] \\
&\quad [ (0,2)(0,01)(0,02)(10) + (0,01)(0,1)(0,3^2) + (0,01)(0,3)(0,01) \\
&\quad + (0,01)(0,2)(0,01)(10)] \\
&= 0,165(0,002 + 0,0009) + 0,0265(0,009 + 0,003 + 0,002 + 0,018) \\
&\quad - 100(0,0004 + 0,00009 + 0,00003 + 0,0002) \\
&= 0,0004785 + 0,000848 - 0,072 \\
&= -0,0706735, \\
W &= m^2\omega\mu [1 - R_0] \\
&= (0,3^2)(0,1 + 0,1 + 0,065)(0,1)(1 - 121,6) \\
&= -0,287631,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
I^* &= \frac{-U + \sqrt{U^2 - 4TW}}{2T} \\
&= \frac{0,0706735 + \sqrt{(-0,0706735)^2 - (4)(0,0002884)(-0,287631)}}{2(0,0002884)} \\
&= 249,06 \\
&\approx 249.
\end{aligned}$$

3. Jumlah *D. citri* terinfeksi dan menularkan  $Q^*$

Jumlah *D. citri* terinfeksi dan menularkan  $Q^*$  adalah

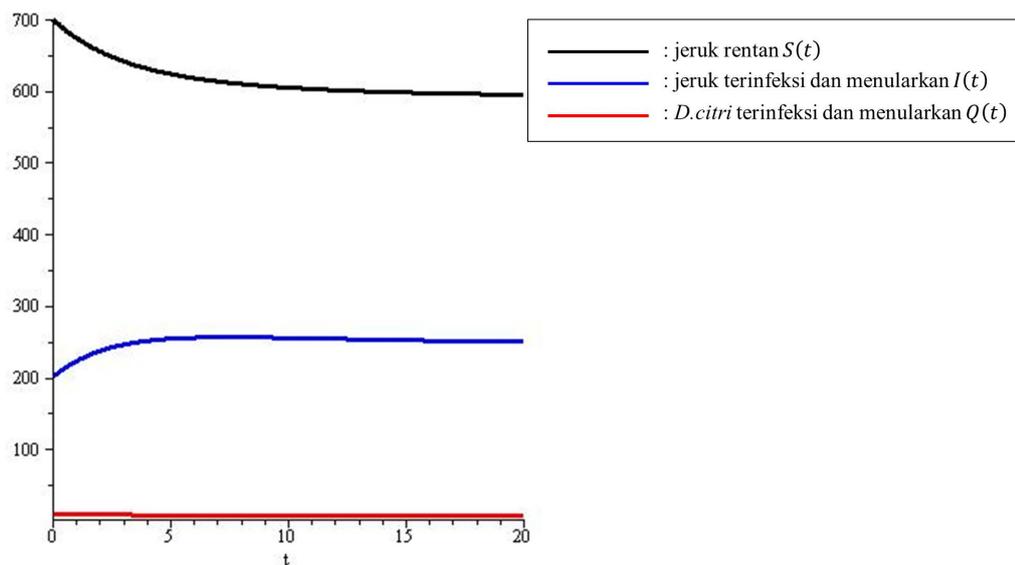
$$\begin{aligned}
 Q^* &= \frac{\beta_1 \Lambda I^*}{m^2 (1 + \alpha_1 I^*) + m \beta_1 I^*} \\
 &= \frac{(0,01)(10)(154,2158)}{(0,3^2)[1 + (0,1)(154,2158)] + (0,3)(0,01)(154,2158)} \\
 &= 7,95 \\
 &\approx 8.
 \end{aligned}$$

Jika  $I^* = 249,06$  disubstitusikan ke Persamaan (4.1), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 S^* &= 1.000 - 1,65I^* \\
 &= 1.000 - 1,65(249,06) \\
 &= 589,05 \\
 &\approx 589.
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh titik ekuilibrium endemik  $E_1 = (S^*, I^*, Q^*) = (589, 249, 8)$ .

Hasil simulasi di titik ekuilibrium endemik  $E_1$  disajikan dalam gambar berikut.



**Gambar 4.1** Grafik  $S$ ,  $I$ , dan  $Q$  di Titik Ekuilibrium  $E_1$

Program Maple untuk menampilkan Gambar 4.1 dapat dilihat pada Lampiran A. Berdasarkan Gambar 4.1, jumlah jeruk rentan  $S$ , jeruk terinfeksi dan menularkan  $I$ , serta  $D. citri$  terinfeksi dan menularkan  $Q$  untuk jangka waktu tertentu akan menuju ke titik ekuilibrium endemik  $E_1$ , yaitu

1. jumlah jeruk rentan lebih kurang 589 pohon,
2. jumlah jeruk terinfeksi dan menularkan lebih kurang 249 pohon, dan
3. jumlah  $D. citri$  terinfeksi dan menularkan lebih kurang 8 ekor.

Dengan demikian terjadi epidemi pada populasi. Selanjutnya, jumlah jeruk sembuh  $R$  dan  $D. citri$  rentan  $P$  dapat dihitung sebagai berikut.

1. Jumlah jeruk sembuh  $R$

Jumlah jeruk sembuh  $R$  adalah

$$\begin{aligned}
 R &= K - (S + I) \\
 &= 1.000 - (589,05 + 249,06) \\
 &= 161,89 \\
 &\approx 162.
 \end{aligned}$$

2. Jumlah  $D. citri$  rentan  $P$

Diperhatikan bahwa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N = \frac{\Lambda}{m}$ , sehingga untuk  $t$  menuju tak hingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{\Lambda}{m} \\
 &= \frac{10}{0,3} \\
 &= 33,33 \\
 &\approx 33,
 \end{aligned}$$

sehingga jumlah  $D. citri$  rentan  $P$  adalah

$$\begin{aligned}
 P &= N - Q \\
 &= 33,33 - 7,95 \\
 &= 25,38 \\
 &\approx 25.
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

1. jumlah jeruk sembuh lebih kurang 162 pohon dan
2. jumlah *D. citri* rentan lebih kurang 25 ekor.

Berdasarkan Gambar 4.1 terlihat bahwa jumlah jeruk rentan  $S(t)$  secara berangsur-angsur menurun. Jumlah jeruk terinfeksi dan menularkan  $I(t)$  berangsur-angsur mengalami kenaikan. Jumlah *D.citri* terinfeksi dan menularkan  $Q(t)$  cenderung tetap.

Jadi, berdasarkan data yang digunakan, penyakit CVPD akan menyebar atau terjadi epidemi pada populasi jeruk, sehingga untuk selanjutnya akan ditentukan faktor-faktor apa saja yang mungkin dapat dikendalikan agar penyakit tidak mewabah. Menurut BPTP Sulawesi Selatan (2002), faktor-faktor yang perlu diperhatikan dalam penanggulangan CVPD adalah

1. pengadaan bibit jeruk bebas penyakit,
2. penggunaan pestisida yang dapat mengendalikan populasi vektor,
3. penggunaan antibiotika oksitetrasiklin pada tanaman jeruk yang terkena CVPD dengan tingkat serangan ringan,
4. eradikasi dengan cara memusnahkan tanaman sakit,
5. dikeluarkannya SK Menteri Pertanian Nomor 129/KPTS/UM/3/1982 yang isinya melarang pengangkutan tanaman atau bibit jeruk dari daerah endemik ke daerah bebas CVPD,

6. pengairan dan pemupukan tanaman jeruk, dan
7. pemetaan daerah serangan CVPD.

Berdasarkan faktor-faktor tersebut, parameter-parameter yang berpengaruh agar penyakit tidak mewabah diantaranya rasio infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan *D. citri* rentan ( $\beta_1$ ), tingkat gigitan *D. citri* terinfeksi dan menularkan terhadap jeruk rentan ( $\beta_2$ ), dan kejadian infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan jeruk rentan ( $\beta_3$ ). Jika nilai parameter-parameter tersebut diminimalkan, maka CVPD mungkin dapat dikendalikan agar tidak mewabah.

Selanjutnya akan dicek apabila nilai-nilai ketiga parameter diperkecil sedangkan nilai parameter-parameter lainnya tetap, apakah tidak akan terjadi wabah atau populasi jeruk untuk jangka waktu yang lama akan bebas dari penyakit. Jika nilai-nilai ketiga parameter diperkecil sebesar  $\frac{1}{10}$  kali, maka  $\beta_1 = 0,001$ ,  $\beta_2 = 0,002$ , dan  $\beta_3 = 0,001$ . Nilai angka rasio reproduksi dasarnya adalah

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} \\
 &= \frac{(0,001)(1.000)}{0,1 + 0,1 + 0,065} + \frac{(0,001)(0,002)(10)(1.000)}{(0,1 + 0,1 + 0,065)(0,3^2)} \\
 &= 3,77 + 0,84 \\
 &= 4,61 \\
 &> 1.
 \end{aligned}$$

Karena  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan tetap ada dalam populasi. Ini berarti harus ada parameter yang diperkecil lagi agar penyakit hilang dari populasi. Jika parameter  $\beta_3$  diperkecil lagi sebesar  $\frac{1}{10}$  kali sehingga menjadi  $\beta_3 = 0,0001$ , maka diperoleh

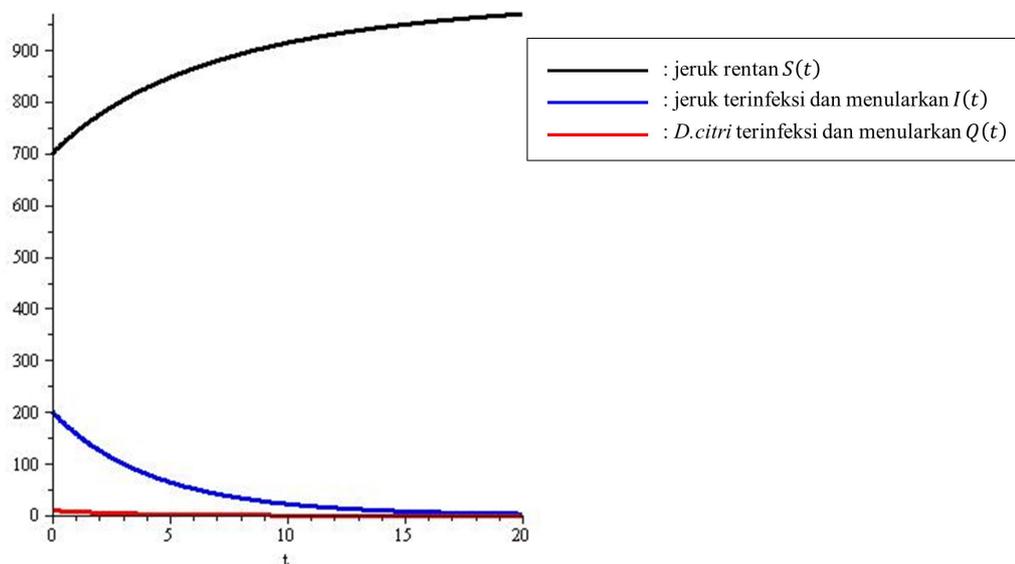
$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} \\
 &= \frac{(0,0001)(1.000)}{0,1 + 0,1 + 0,065} + \frac{(0,001)(0,002)(10)(1.000)}{(0,1 + 0,1 + 0,065)(0,3^2)} \\
 &= 0,38 + 0,84 \\
 &= 1,22 \\
 &> 1.
 \end{aligned}$$

Karena  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan tetap ada dalam populasi. Ini berarti harus ada parameter yang diperkecil lagi agar penyakit hilang dari populasi. Jika parameter  $\beta_1$  diperkecil lagi sebesar  $\frac{1}{10}$  kali sehingga menjadi  $\beta_1 = 0,0001$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta_3 K}{\omega} + \frac{\beta_1 \beta_2 \Lambda K}{\omega m^2} \\ &= \frac{(0,0001)(1.000)}{0,1 + 0,1 + 0,065} + \frac{(0,0001)(0,002)(10)(1.000)}{(0,1 + 0,1 + 0,065)(0,3^2)} \\ &= 0,38 + 0,084 \\ &= 0,464 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Karena  $R_0 < 1$ , maka penyakit tidak akan menyebar, dengan kata lain untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakitnya adalah  $E_0 = (S^*, I^*, Q^*) = (K, 0, 0) = (1.000, 0, 0)$ .

Hasil simulasi di titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  disajikan dalam gambar berikut.



**Gambar 4.2** Grafik  $S$ ,  $I$ , dan  $Q$  di Titik Ekuilibrium  $E_0$

Program Maple untuk menampilkan Gambar 4.2 dapat dilihat pada Lampiran B. Berdasarkan Gambar 4.2, jumlah jeruk rentan  $S$ , jeruk terinfeksi dan menu-

larkan  $I$ , serta  $D. citri$  terinfeksi dan menularkan  $Q$  untuk jangka waktu tertentu akan menuju ke titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$ , yaitu

1. jumlah jeruk rentan lebih kurang 1.000 pohon,
2. jumlah jeruk terinfeksi dan menularkan lebih kurang 0 pohon, dan
3. jumlah  $D. citri$  terinfeksi dan menularkan lebih kurang 0 ekor.

Dengan demikian tidak terjadi epidemi pada populasi, ini berarti populasi jeruk bebas penyakit.

Selanjutnya, jumlah jeruk sembuh  $R$  dan  $D. citri$  rentan  $P$  dapat dihitung sebagai berikut.

1. Jumlah jeruk sembuh  $R$

Jumlah jeruk sembuh  $R$  adalah

$$\begin{aligned} R &= K - (S + I) \\ &\approx 1.000 - (1.000 + 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Jumlah  $D. citri$  rentan  $P$

Diperhatikan bahwa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N = \frac{\Lambda}{m}$ , sehingga untuk  $t$  menuju tak hingga diperoleh

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Lambda}{m} \\ &= \frac{10}{0,3} \\ &= 33,33 \\ &\approx 33, \end{aligned}$$

sehingga jumlah  $D. citri$  rentan  $P$  adalah

$$\begin{aligned}
 P &= N - Q \\
 &= 33,33 - 0 \\
 &= 33,33 \\
 &\approx 33.
 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh

1. jumlah jeruk sembuh lebih kurang 0 pohon dan
2. jumlah *D. citri* rentan lebih kurang 33 ekor.

Berdasarkan Gambar 4.2 terlihat bahwa jumlah jeruk rentan  $S(t)$  mengalami kenaikan cukup signifikan. Jumlah jeruk terinfeksi dan menularkan  $I(t)$  turun cukup signifikan di awal, kemudian berangsur-angsur turun di sisa waktu. Jumlah *D.citri* terinfeksi dan menularkan  $Q(t)$  cenderung tetap.

Dengan demikian, faktor-faktor yang dapat dikendalikan agar penyakit tidak mewabah atau populasi jeruk bebas penyakit diantaranya rasio infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan *D. citri* rentan ( $\beta_1$ ), tingkat gigitan *D. citri* terinfeksi dan menularkan terhadap jeruk rentan ( $\beta_2$ ), dan kejadian infeksi antara jeruk terinfeksi dan menularkan dengan jeruk rentan ( $\beta_3$ ).

Paramater  $\beta_1$  dapat dikendalikan dengan cara pemusnahan tanaman sakit. Paramater  $\beta_2$  dapat dikendalikan dengan cara penggunaan pestisida yang dapat mengendalikan populasi vektor. Paramater  $\beta_3$  dapat dikendalikan dengan cara pengadaan bibit jeruk bebas penyakit. Berdasarkan simulasi, parameter yang paling berpengaruh adalah  $\beta_1$  dan  $\beta_3$  sehingga pemusnahan tanaman sakit dan pengadaan bibit jeruk bebas penyakit harus lebih diperhatikan.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Model epidemi pada tanaman dengan respon pemangsaan mengikuti fungsi respon Holling Tipe II yang disajikan dalam Sistem (3.7) memiliki satu titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  dan satu titik ekuilibrium endemik  $E_1$ .
2. Angka rasio reproduksi dasar untuk model epidemi pada tanaman menunjukkan bahwa penyebaran penyakit dalam populasi dipengaruhi oleh rasio infeksi antara inang terinfeksi dan menularkan dengan hama rentan, tingkat gigitan hama terinfeksi dan menularkan terhadap inang rentan, kejadian infeksi antara inang terinfeksi dan menularkan dengan inang rentan, tingkat perubahan inang terinfeksi dan menularkan menjadi inang sembuh (tingkat kesembuhan), tingkat kematian alami inang, kelahiran atau imigrasi hama, tingkat kematian alami hama, dan tingkat kematian inang karena penyakit.
3. Analisis perilaku model menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  bersifat stabil asimtotik lokal jika nilai angka rasio reproduksi dasar kurang dari satu dan titik ekuilibrium endemik  $E_1$  bersifat stabil asimtotik lokal jika nilai angka rasio reproduksi dasar lebih dari satu.
4. Simulasi model untuk penyakit CVPD pada tanaman jeruk menunjukkan bahwa jika angka rasio reproduksi dasar lebih dari satu, maka penyakit akan menyebar, dengan kata lain akan terjadi epidemi sehingga tanaman jeruk yang terinfeksi dan menularkan akan tetap ada dalam populasi. Jika angka rasio

reproduksi dasar kurang dari satu, maka penyakit tidak akan menyebar, dengan kata lain untuk jangka waktu tertentu populasi akan bebas dari penyakit. Simulasi model sejalan dengan analisis perilaku model.

## **5.2. Saran**

Model epidemi tanaman pada penelitian ini hanya dianalisis kestabilan lokalnya saja. Oleh karena itu, penulis menyarankan pengkajian lebih lanjut mengenai kestabilan globalnya agar berlaku secara umum. Dengan kata lain semua syarat awal yang diambil tidak hanya di sekitar titik ekuilibrium. Selain itu, model ini juga dapat diaplikasikan pada penyakit lain yang sesuai selain penyakit CVPD pada tanaman jeruk.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bank Indonesia, 2008, *Budidaya Tanaman Jeruk Keprok/Siam*, Direktorat Kredit, BPR, dan UMKM, Bank Indonesia.
- BPTP Sulawesi Selatan, 2002, *Pengenalan Penyakit CVPD pada Tanaman Jeruk dan Upaya Pengendaliannya*, Balai Pengkajian Teknologi Pertanian (BPTP), Departemen Pertanian, Sulawesi Selatan.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C., 1997, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Sixth Edition, John Wiley and Sons, New York.
- Brauer, F., Driessche, P., dan Wu, J., 1945, *Mathematical Epidemiology*, Springer-Verlag, New York.
- Edwards, C. H. dan Penney, D. E., 2000, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, Fourth Edition, Prentice-Hall, New Jersey.
- Finizio, N. dan Ladas, G., 1982, *An Introduction to Differential Equations with Difference Equations, Fourier Series, and Partial Differential Equations*, Wadsworth Publishing Company, California.
- Geman, S., 1986, *The Spectral Radius of Large Random Matrices*, The Annals of Probability Vol. 14, No. 4, 1313-1328.
- Gantmacher, F. R., 1959, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.
- Hanh, W., 1967, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York.
- Holling, C. S., 1959, *Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism*, Entomology Journal Canada. 91: 385-398.

- Ma, Z. dan Li, J., 2009, *Dinamical Modeling and Analysis of Epidemics*, World Scientific Publishing, Singapore.
- Machowsky, J., Janusz, W. B., dan James, R. B., 2008, *Power System Dynamics: Stability and Control*, John Wiley and Sons, New York.
- Muldowney, J. S., 1990, *Compound Matrices and Ordinary Differential Equations*, Rocky Mountain Mathematics Consortium Volume 20, Number 4.
- Nurhayati, 2012, *Virus Penyebab Penyakit Tanaman*, Universitas Sriwijaya, Sumatera Selatan.
- Olsder, G. J., 1998, *Mathematical System Theory*, Second Edition, Delft University Press, Netherlands.
- Perko, L., 2000, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer-Verlag, New York.
- Ross, S. L., 1984, *Differential Equation*, Third Edition, John Wiley and Sons, Singapore.
- Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. M., 2010, *Real Analysis*, Fourth Edition, China Machine Press, China.
- Saputra, S., Swastika, S., dan Yuliani, N., 2012, *Pengendalian Penyakit CVPD (Citrus Vein Phloem Degeneration)*, Balai Pengkajian Teknologi Pertanian (BPTP) Riau, Pekanbaru.
- Shi, R., Zhao, H., dan Tang, S., 2014, *Global Dynamic Analysis of a Vector-Borne Plant Disease Model*, Springer Open Journal: Advances in Difference Equations, New York.
- Subiono, 2010, *Matematika Sistem*, Institut Teknologi Surabaya, Surabaya.
- Verhulst, F., 1985, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.

Wijaya, I. N., Adiartayasa, W., Sritamin, M., dan Yuliadhi, K. A., 2010, *Dinamika Populasi Diaphorina citri Kuwayama (Homoptera: Psyllidae) dan Deteksi CVPD dengan Teknik PCR*, Jurnal Entomologi Indonesia, Vol. 7 No. 2, 78-87.

Bali bisa Kembalikan Kejayaan Jeruk Buleleng, 2005, diakses tanggal 5 Juni 2015 dari [www.balipost.co.id/BaliPostcetak/2005/2/8/e6.htm](http://www.balipost.co.id/BaliPostcetak/2005/2/8/e6.htm).

## LAMPIRAN A

### Program Maple untuk Menampilkan Gambar 4.1

```
>restart;
>with(DEtools);
>with(plots);
>K := 1000; beta1 := 0.01; beta2 := 0.02; beta3 := 0.01; alpha1 := 0.1; alpha2 :=
0.2; alpha3 := 0.2; gamma1 := 0.065; mu := 0.1; Lambda := 10; m := 0.3; d := 0.1;
>p1 := phaseportrait([diff(s(t), t) = mu*K-mu*s(t)-beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
-beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))+d*i(t), diff(i(t), t) = beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
+beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))-(d+mu+gamma1)*i(t), diff(q(t), t) = beta1*Lambda*
i(t)/(m*(1+alpha1*i(t)))-beta1*i(t)*q(t)/(1+alpha1*i(t))-m*q(t)], [s(t), i(t), q(t)], t =
0 .. 20, [[s(0) = 700, i(0) = 200, q(0) = 10]], stepsize = 0.05, scene = [t, s(t)], line-
color = black):
>p2 := phaseportrait([diff(s(t), t) = mu*K-mu*s(t)-beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))-
beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))+d*i(t), diff(i(t), t) = beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
+beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))-(d+mu+gamma1)*i(t), diff(q(t), t) = beta1*Lambda*
i(t)/(m*(1+alpha1*i(t)))-beta1*i(t)*q(t)/(1+alpha1*i(t))-m*q(t)], [s(t), i(t), q(t)], t =
0 .. 20, [[s(0) = 700, i(0) = 200, q(0) = 10]], stepsize = 0.05, scene = [t, i(t)], line-
color = blue):
>p3 := phaseportrait([diff(s(t), t) = mu*K-mu*s(t)-beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))-
beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))+d*i(t), diff(i(t), t) = beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
+beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))-(d+mu+gamma1)*i(t), diff(q(t), t) = beta1*Lambda*
i(t)/(m*(1+alpha1*i(t)))-beta1*i(t)*q(t)/(1+alpha1*i(t))-m*q(t)], [s(t), i(t), q(t)], t =
0 .. 20, [[s(0) = 700, i(0) = 200, q(0) = 10]], stepsize = 0.05, scene = [t, q(t)], line-
color = red):
>display(p1, p2, p3);
```

## LAMPIRAN B

### Program Maple untuk Menampilkan Gambar 4.2

```
>restart;
>with(DEtools);
>with(plots);
>K := 1000; beta1 := 0.0001; beta2 := 0.002; beta3 := 0.0001; alpha1 := 0.1; alpha2
:= 0.2; alpha3 := 0.2; gamma1 := 0.065; mu := 0.1; Lambda := 10; m := 0.3; d :=
0.1;
>p1 := phaseportrait([diff(s(t), t) = mu*K-mu*s(t)-beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
-beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))+d*i(t), diff(i(t), t) = beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
+beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))-(d+mu+gamma1)*i(t), diff(q(t), t) = beta1*Lambda*
i(t)/(m*(1+alpha1*i(t)))-beta1*i(t)*q(t)/(1+alpha1*i(t))-m*q(t)], [s(t), i(t), q(t)], t =
0 .. 20, [[s(0) = 700, i(0) = 200, q(0) = 10]], stepsize = 0.05, scene = [t, s(t)], line-
color = black);
>p2 := phaseportrait([diff(s(t), t) = mu*K-mu*s(t)-beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))-
beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))+d*i(t), diff(i(t), t) = beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
+beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))-(d+mu+gamma1)*i(t), diff(q(t), t) = beta1*Lambda*
i(t)/(m*(1+alpha1*i(t)))-beta1*i(t)*q(t)/(1+alpha1*i(t))-m*q(t)], [s(t), i(t), q(t)], t =
0 .. 20, [[s(0) = 700, i(0) = 200, q(0) = 10]], stepsize = 0.05, scene = [t, i(t)], line-
color = blue);
>p3 := phaseportrait([diff(s(t), t) = mu*K-mu*s(t)-beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))-
beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))+d*i(t), diff(i(t), t) = beta2*q(t)*s(t)/(1+alpha2*q(t))
+beta3*i(t)*s(t)/(1+alpha3*i(t))-(d+mu+gamma1)*i(t), diff(q(t), t) = beta1*Lambda*
i(t)/(m*(1+alpha1*i(t)))-beta1*i(t)*q(t)/(1+alpha1*i(t))-m*q(t)], [s(t), i(t), q(t)], t =
0 .. 20, [[s(0) = 700, i(0) = 200, q(0) = 10]], stepsize = 0.05, scene = [t, q(t)], line-
color = red);
>display(p1, p2, p3);
```